Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 12

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **20.1.2016** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Drehungen und Spiegelungen in der Ebene*) (5+5+2)

(a) Man rechne $D(\alpha)S(\beta) = S(\alpha+\beta)$ und $S(\alpha)D(\beta) = S(\alpha-\beta)$ aus der Vorlesung nach.

(b) Man zeige, dass

$$O(2) := \Big\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \ A \text{ ist eine Dreh- oder Spiegelungsmatrix} \Big\}$$

eine Gruppe mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung ist.

(c) Ist die Gruppe abelsch?

Übungsaufgabe 2 (*Spur linearer Abbildungen*) (5+5+5)

(a) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben, dann definieren wir die **Spur** von A über

$$\operatorname{Tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ man zeige $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

(b) Für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich zeige man $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$.

(c) Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit der Basis $\mathcal{B}$. Wir definieren

$$\operatorname{Tr} f := \operatorname{Tr} A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f).$$

Man zeige, dass $\operatorname{Tr} f$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt.

Übungsaufgabe 3 (*Eigenschaften von Matrizen über Determinanten erkennen*) (5+8)

(a) Man zeige, dass für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit ganzzahligen Einträgen genau dann A^{-1} ganzzahlige Einträge hat, wenn $\det A \in \{1, -1\}$ gilt.

(b) Man zeige, dass A genau dann das Produkt von Elementarmatrizen vom Typ III ist, wenn $\det A = 1$ ist.

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (*Determinante linearer Abbildungen*) (0)

Es sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit der Basis $\mathcal{B}$. Wir definieren

$$\det f := \det A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f).$$

Man zeige, dass $\det f$ nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ abhängt.

Tutoriumsaufgabe 2 (*Ähnlichkeit zwischen Dreh- und Spiegelungsmatrizen*) (0)

(a) Man berechne $\operatorname{Tr} S(\alpha)$, $\operatorname{Tr} D(\alpha)$, $\det S(\alpha)$ und $\det D(\alpha)$.
(b) Man begründe anschaulich geometrisch, dass $S(\alpha)$ und $S(\beta)$ ähnlich sind für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(c) Wann sind $D(\alpha)$ und $D(\beta)$ ähnlich? Wann $D(\alpha)$ und $S(\beta)$?