ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 14

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **3.2.2016** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Beispiele euklidischer Vektorräume*) (10+5+3+2*+10*)

Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum? Man beweise oder widerlege die eigene Behauptung.

(a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$ für $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\langle x, y \rangle := x_1y_1 - x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_2 + x_3y_3$ für $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

(c) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\langle x, y \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + |x_3y_3|$ für $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

(d) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\langle x, y \rangle := x_1^2 - x_2y_2 + x_3y_3$ für $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

(e) Man betrache $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(A^T B)$.

Übungsaufgabe 2 (*Einige Anwendungen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung*) (7+10*+5)

Man folgere folgende Ungleichungen aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für ein geeignetes Skalarprodukt und diskutiere unter welchen Bedingungen sogar Gleichheit gilt.

(a) Für $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

(b) Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ setzen wir

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Dann gilt für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ die Ungleichung $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

(c) Mit der Notation aus (b) gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathrm{Tr}(A^T B) \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

Übungsaufgabe 3 (10+10*)

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Man zeige $p_A = p_{A^T}$ und $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ gilt[1].

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben. Man zeige, dass es genau dann ein $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ gibt mit $T^{-1}AT, T^{-1}BT$ sind beides Diagonalmatrizen, wenn A, B diagonalisierbar sind und $AB = BA$ gilt.

[1] *Bemerkung:* Es sind sogar A und A^T ähnlich (auch wenn man nichts über die Diagonalisierbarkeit weiß). Ich kenne aber keinen Beweis, den man mit jetzigem Wissen verlangen könnte. Vielleicht findet aber jemand von euch einen Beweis?

Bitte wenden!

Übungsaufgabe 4 (*Multiple-Choice*) (18*)

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten 3 Punkte pro Teilaufgabe, wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.

(a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, ..., v_n \in V$ gegeben, dann ist $v_1, ..., v_n$ eine Basis, falls
□ $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig und erzeugend sind. □ Jedes $v \in V$ genau eine Darstellung als $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$ für $\alpha_k \in \mathbb{K}$ besitzt. □ $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig ist und $\dim V \leq n$ gilt. □ $v_1, ..., v_n$ erzeugend ist und $\dim V \leq n$ gilt. □ $v_1, ..., v_n$ erzeugend ist und v_1 nicht als Linearkombination von $v_2, ..., v_n$ geschrieben werden kann. □ $v_1, ..., v_n$ erzeugend ist und $\dim V = n$ gilt.

(b) Es sei A eine quadratische komplexe Matrix. Dann gilt:
□ Man findet stets S, T invertierbar mit SAT ist eine Diagonalmatrix. □ Man findet stets S invertierbar mit $S^{-1}AS$ ist eine Diagonalmatrix. □ A ist die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung. □ A hat mindestens einen Eigenwert. □ A hat mindestens zwei verschiedene Eigenwerte, wenn A keine Diagonalmatrix ist. □ $\det A = p_A(0)$.

(c) Es sei $f: V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen V, W eine lineare Abbildung. Unter gewissen Voraussetzungen wurden in der Vorlesung und Übung $\operatorname{rg} f$, $\operatorname{Tr} f$, $\det f$, p_f definiert:
□ $\det f$ ist unter den gegebenen Voraussetzungen definiert. □ $\det f$ ist definiert, falls $V = W$ ist. □ $\operatorname{rg} f$ ist unter den gegebenen Voraussetzungen definiert. □ $\operatorname{Tr} f$ ist definiert, falls $\dim V = \dim W$ gilt. □ p_f ist definiert, falls $V = W$ ist. □ $\mathrm{p_f}$ ist definiert, falls $\dim V = \dim W$ gilt.

(d) Folgende Mengen sind eine Ebene:
□ $\text{Lös}(A, b)$, falls $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = n - 2$ für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. □ $\text{Lös}(A, b)$, falls $\operatorname{rg} A = m - 2$ für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. □ $\text{Lös}(A, b)$, falls $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = m - 2$ für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. □ $\{v + \lambda u + \mu w : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ und $u, v, w \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. □ Ein zweidimensionaler affiner Unterraum eines Vektorraumes. □ Ein zweidimensionaler Untervektorraum eines Vektorraumes.

(e) Über die Diagonalisierbarkeit einer quadratischen komplexen Matrix A kann man folgende Aussagen machen:
□ A ist diagonalisierbar, falls p_A keine mehrfache Nullstelle hat. □ A kann nicht diagonalisierbar sein, wenn A nur einen Eigenwert hat. □ A ist diagonalisierbar, falls es eine Basis von Eigenvektoren gibt. □ Gilt $A^3 = 0$ aber $A \neq 0$, dann ist A nicht diagonalisierbar.
□ Gilt $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und hat A einen komplexen nicht-reellen Eigenwert, dann ist A diagonalisierbar. □ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nur zwei verschiedene Eigenwerte, dann ist A nicht diagonalisierbar.

(f) Es sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung und $\dim V = \dim W < \infty$. Dann kann man folgende Aussagen treffen:
□ f ist injektiv genau dann, wenn f surjektiv ist. □ f ist injektiv genau dann, wenn $f(v) = 0$ bereits $v = 0$ impliziert. □ f ist ein Isomorphismus, falls $f(V)$ eine Basis von W enthält. □ $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim V$. □ f ist genau dann ein Isomorphimus, wenn jede Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ von f invertierbar ist. □ f hat eine Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$, welche eine Diagonalmatrix ist.

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (*Zusammenfassung III*) (0)

Man schreibe sich eine Zusammenfassung des Vorlesungs- und Übungsstoffes bis zum 31.1. und lerne alle relevanten Definitionen und Sätze. Falls dazu Unklarheiten bestehen sollten, dann bereiten Sie dazu Fragen für das Tutorium vor.

Bemerkung: Zu dieser Aufgabe wird es keine Musterlösung geben. Sie sollten diese Zusammenfassung selber erstellen.

Tutoriumsaufgabe 2 (*Der Satz von Thales*) (0)

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.

(a) Es seien $x, y \in V$ gegeben. Man zeige den Satz von Thales:
$(x - y) \perp (x + y)$ gilt genau dann, wenn $\|x\| = \|y\|$ gilt.

(b) Man veranschauliche sich den Satz für $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.