Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 15

Lineare Algebra 1

Abgabe (nur falls jemand noch Punkte benötigt!) **10.2.2016** um spätestens **16ct**.

Übungsaufgabe 1 (*Diagonalisierbarkeit*) (10+5)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind reell bwz. komplex diagonalisierbar (die dritte Matrix ist in $O(3)$!)?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es sei A eine komplexe Matrix mit charakteristischem Polynom $p_A(\lambda) = -\lambda^5 + \lambda + 1$. Man zeige, dass A diagonalisierbar ist.

Übungsaufgabe 2 (*algebraische und geometrische Vielfachheit*) (10+10*)

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Man zeige, dass die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von jedem Eigenwert identisch sind und $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda)$ für gewisse $\lambda_k \in \mathbb{K}$ gilt.

(b) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben derart, dass $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda)$ für gewisse $\lambda_k \in \mathbb{K}$ gilt und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für alle Eigenwerte identisch sind. Man zeige, dass A diagonalisierbar ist.

Übungsaufgabe 3 (*Typus einer Orthogonalmatrix in* 3 *Dimensionen bestimmen*) (4+3+3+5)

(a) Es seien $A_1, A_2 \in O(3)$. Dabei sei A_1 eine Drehung an einer Achse mit Winkel $\alpha \in (-\pi, \pi]$ (Typ I) und A_2 eine Spiegelung an einer Ebene mit anschließender Drehung orthogonal zu der Spiegelungsebene um einen Winkel $\beta \in (-\pi, \pi]$ (Typ II). Man berechne $\det A_1$, $\det A_2$ sowie $\operatorname{Tr} A_1$ und $\operatorname{Tr} A_2$.

(b) Es seien $A, B \in O(3)$ vom Typ I mit Winkel $\alpha_A, \alpha_B \in (-\pi, \pi]$. Man zeige, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn $|\alpha_A| = |\alpha_B|$ gilt.

(c) Es seien $A, B \in O(3)$ vom Typ II mit Winkel $\beta_A, \beta_B \in (-\pi, \pi]$. Man zeige, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn $|\beta_A| = |\beta_B|$ gilt.

(d) Man entscheide bei den folgenden Matrizen um welchen Typ es sich handelt und bestimme den unorientierten Drehwinkel $|\alpha|$ bzw. $|\beta|$.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (*Zusammenfassung IV*) (0)

Man schreibe sich eine Zusammenfassung des Vorlesungs- und Übungsstoffes bis zum 5.2.2016 und lerne alle relevanten Definitionen und Sätze. Falls dazu Unklarheiten bestehen sollten, dann bereiten Sie dazu Fragen für das Tutorium vor.

Bemerkung: Zu dieser Aufgabe wird es keine Musterlösung geben. Sie sollten diese Zusammenfassung selber erstellen.

Tutoriumsaufgabe 2 (0)

Es seien $A_1, A_2 \in O(3)$ wie in Übungsaufgabe 3 (a). Man zeige A_1, A_2 sind nicht ähnlich.