



## Übungsblatt 15

### Lineare Algebra 1

Abgabe (nur falls jemand noch Punkte benötigt!) **10.2.2016** um spätestens **16ct**.

#### Übungsaufgabe 1 (*Diagonalisierbarkeit*) (10+5)

- (a) Welche der folgenden Matrizen sind reell bzw. komplex diagonalisierbar (die dritte Matrix ist in  $O(3)$ )?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Es sei  $A$  eine komplexe Matrix mit charakteristischem Polynom  $p_A(\lambda) = -\lambda^5 + \lambda + 1$ . Man zeige, dass  $A$  diagonalisierbar ist.

*Hinweis:* Wenn eine Nullstelle  $\lambda$  eine mehrfache Nullstelle wäre, dann wäre  $p'_A(\lambda) = 0$ . Nutzen Sie das aus.

#### Übungsaufgabe 2 (*algebraische und geometrische Vielfachheit*) (10+10\*)

- (a) Es sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  diagonalisierbar. Man zeige, dass die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von jedem Eigenwert identisch sind und  $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$  für gewisse  $\lambda_k \in \mathbb{K}$  gilt.
- (b) Es sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gegeben derart, dass  $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$  für gewisse  $\lambda_k \in \mathbb{K}$  gilt und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für alle Eigenwerte identisch sind. Man zeige, dass  $A$  diagonalisierbar ist.

*Hinweis:* Sie müssen Lemma (22.6) verallgemeinern.

#### Übungsaufgabe 3 (*Typus einer Orthogonalmatrix in 3 Dimensionen bestimmen*) (4+3+3+5)

- (a) Es seien  $A_1, A_2 \in O(3)$ . Dabei sei  $A_1$  eine Drehung an einer Achse mit Winkel  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  (Typ I) und  $A_2$  eine Spiegelung an einer Ebene mit anschließender Drehung orthogonal zu der Spiegelungsebene um einen Winkel  $\beta \in (-\pi, \pi]$  (Typ II). Man berechne  $\det A_1$ ,  $\det A_2$  sowie  $\text{Tr } A_1$  und  $\text{Tr } A_2$ .
- (b) Es seien  $A, B \in O(3)$  vom Typ I mit Winkel  $\alpha_A, \alpha_B \in (-\pi, \pi]$ . Man zeige, dass  $A$  und  $B$  genau dann ähnlich sind, wenn  $|\alpha_A| = |\alpha_B|$  gilt.
- (c) Es seien  $A, B \in O(3)$  vom Typ II mit Winkel  $\beta_A, \beta_B \in (-\pi, \pi]$ . Man zeige, dass  $A$  und  $B$  genau dann ähnlich sind, wenn  $|\beta_A| = |\beta_B|$  gilt.
- (d) Man entscheide bei den folgenden Matrizen um welchen Typ es sich handelt und bestimme den unorientierten Drehwinkel  $|\alpha|$  bzw.  $|\beta|$ .

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**Bitte wenden!**

**Tutoriumsaufgabe 1** (*Zusammenfassung IV*) (0)

Man schreibe sich eine Zusammenfassung des Vorlesungs- und Übungsstoffes bis zum 5.2.2016 und lerne alle relevanten Definitionen und Sätze. Falls dazu Unklarheiten bestehen sollten, dann bereiten Sie dazu Fragen für das Tutorium vor.

*Bemerkung:* Zu dieser Aufgabe wird es keine Musterlösung geben. Sie sollten diese Zusammenfassung selber erstellen.

**Tutoriumsaufgabe 2** (0)

Es seien  $A_1, A_2 \in O(3)$  wie in Übungsaufgabe 3 (a). Man zeige  $A_1, A_2$  sind nicht ähnlich.