Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 1

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **21.10.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Teamnamen; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind (dennoch stets alle in eigenen Worten abgeben)

Jedes der Übungsblätter wird voraussichtlich 40 durch Übungsaufgaben erreichbare Punkte beinhalten. Sie finden immer eine Version mit und eine ohne Hinweise online. Diese verraten aber teilweise schon viel und können Ihnen den Spaß an der Knobelei verderben.
Das Übungsblatt beinhaltet einen schriftlichen (Tutoriumsaufgaben) und einen mündlichen Teil (Übungsaufgaben).
Die **Tutoriumsaufgaben** sollten Sie bis zu Ihrem Tutoriumstermin vorbereitet haben. Sie sollten sich darauf so vorbereiten, dass Sie die Lösung ihrer Tutoriumsgruppe erklären können.
Gemeinsam mit Ihrem Team machen Sie sich Lösungsskizzen von den **Übungsaufgaben** und verteilen die Übungsaufgaben untereinander. Die Reinschrift fertigen Sie dabei einzeln (auch von Aufgaben an, für die Sie nicht zuständig waren) an und geben diese am oben genannten Abgabetermin in der Übung ab (getrennt nach Tutor).

Übungsaufgabe 1 (*De Morgansche Gesetze für Mengen*) (5+5)

Es seien X, Y, Z Mengen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $Z \backslash (X \cup Y) = (Z \backslash X) \cap (Z \backslash Y)$
(b) $Z \backslash (X \cap Y) = (Z \backslash X) \cup (Z \backslash Y)$

Übungsaufgabe 2 (4+8+4+4)

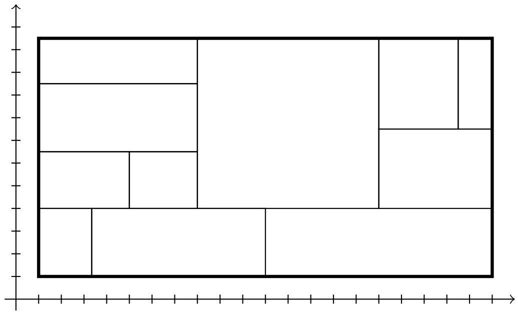
Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen den Mengen X und Y.

(a) Man beweise, dass $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle $A, B \subset X$ gilt.
(b) Man zeige, dass $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subset X$ gilt und $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ im Allgemeinen falsch ist.
Hinweis: Für das Gegenbeispiel müssen Sie also A, B und f finden mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Suchen Sie geeignete A,B einelementig und f nicht-injektiv.
(c) Beweisen Sie, dass $\forall M, N \subset Y : f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$ gilt.
(d) Zeigen Sie auch $\forall M, N \subset Y : f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

Übungsaufgabe 3 (*Knobelaufgabe*) (10)

Indem Sie kleine (endlich viele) Rechtecke aneinanderlegen, wollen Sie ein größeres Rechteck bauen. Für jedes der kleinen Rechtecke ist eine der beiden Seitenlängen eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass dies auch für das größere Rechteck gilt, dass also eine der beiden Seitenlängen des größeren Rechtecks eine natürliche Zahl ist. Für ein Beispiel siehe die folgende Skizze:

Bitte wenden!



Hinweis: Es gibt eine ganze Reihe möglicher Beweise dieser Aussage. Eine Möglichkeit ist es in der linken unteren Ecke des großen Rechtecks zu starten und dann immer entlang von Seiten der kleinen Rechtecke zu laufen, deren Seitenlänge eine natürliche Zahl ist. Wenn man jede Seite eines Rechtecks höchtens einmal durchläuft, dann endet der Weg schließlich in einer anderen Ecke des großen Rechtecks (warum?). Dies zeigt dann die Aussage (warum?).

Tutoriumsaufgabe 1 (0)

Man zeige $X \backslash (X \backslash Y) = X \cap Y$ für Mengen X, Y.
Hinweis: Wie zeigt man die Gleichheit zweier Mengen?

Tutoriumsaufgabe 2 (0)

Gegeben sei eine affine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ (für $a, b \in \mathbb{R}$).

(a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist f injektiv?
(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist f surjektiv?
(c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass f bijektiv ist. Man zeige, dass f^{-1} auch eine affine Funktion ist.