ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 2

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **28.10.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Zwei Beispiele von Gruppen*) (10+10)

(a) Es sei X eine Menge. Die Menge

$$S(X) = \{f\colon X \to X : \ f \text{ ist bijektiv}\}$$

zusammen mit der Verknüpfung von Funktionen bildet eine Gruppe. Ist die Gruppe abelsch (Beweis!)?

(b) Man zeige, dass die Menge

$$G = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ ist affin und bijektiv}\}$$

zusammen mit der Verknüpfung von Funktionen eine Gruppe bildet. Ist die Gruppe abelsch (Beweis!)?

Übungsaufgabe 2 (*Graphen von Funktionen*) (5+5+5)

Es seien X, Y Mengen. Man beweise folgende Aussagen:

(a) Genau dann ist $\Gamma \subset X \times Y$ der Graph einer Funktion $f\colon X \to Y$, wenn $\forall x \in X \exists y \in Y :$ $(x, y) \in \Gamma$ und $\forall (x, y), (x', y') \in \Gamma : \ x = x' \Rightarrow y = y'$ gilt.

(b) Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Genau dann ist Γ der Graph einer affinen Funktion, wenn aus $(x, y), (x', y') \in \Gamma$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bereits $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y') \in \Gamma$ folgt.

(c) Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Genau dann ist Γ der Graph einer linearen Funktion, wenn aus $(x, y), (x', y') \in \Gamma$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bereits $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \in \Gamma$ folgt. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird dabei linear genannt, falls diese von der Gestalt $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$ ist.

Übungsaufgabe 3 (*Folgerungen aus der Existenz von Minima in* $\mathbb{N}$) (5+10*)

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass jede nicht-leere Menge $M \subset \mathbb{N}$ ein Minimum besitzt.

(a) Es sei nun $m_0 \in \mathbb{N}$ fest und $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage mit $A(m_0)$ ist wahr. Für alle $m \in \mathbb{N}$ sei weiter $A(m)$ wahr, falls $A(n)$ wahr ist für alle $m_0 \leq n < m$. Man folgere aus der Eingangsbemerkung, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m_0$ die Aussage $A(n)$ wahr ist. Sie haben damit das Prinzip der vollständigen Induktion aus der obigen Aussage bewiesen.

(b) Man zeige, dass eine natürliche Zahl $p > 1$ genau dann prim ist, wenn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $p|nm$ bereits $p|n$ oder $p|m$ folgt[1].

[1] Dieses Resultat benötigen wir an einer kleinen Stelle in der Vorlesung. Man beachte, dass wir die Eindeutigkeit und Existenz der Primfaktorzerlegung nicht beweisen haben. Für den Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung benutzt man in der Regel dieses Resultat. Es macht also keinen Sinn, wenn Sie bei Ihrem Beweis die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung benutzen.

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (*Ein weiteres Beispiel einer Gruppe*) (0)
Man zeige, dass die Menge

$$G = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}:\ f \text{ ist linear und bijektiv}\}$$

zusammen mit der Verknüpfung von Funktionen eine abelsche Gruppe bildet. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird dabei linear genannt, falls diese von der Gestalt $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$ ist.

Tutoriumsaufgabe 2 (*Der Graph der Umkehrfunktion*) (0)
Es seien X und Y Mengen. Es bezeichne $S\colon X \times Y \to Y \times X$ die Abbildung $S\colon (x, y) \mapsto (y, x)$. Man zeige, dass für eine bijektive Funktion $f\colon X \to Y$ die Identität $S(\Gamma_f) = \Gamma_{f^{-1}}$ gilt. Man beschreibe diese Aussage auch anschaulich im Fall $X = Y = \mathbb{R}$ (Was ist S?).