ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 4

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **11.11.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Nachweis, dass es sich um Vektorräume handelt*) (5+5)

Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen zusammen mit der angegeben Skalarmultiplikation und der angegebenen Addition einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

(a) Man betrachte die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad höchstens n ($n \in \mathbb{N}$ sei fest)

$$P_n := \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| \exists a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}:\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\}$$

zusammen mit der Addition definiert über $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und der Skalarmultiplikation definiert über $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in P_n$.

(b) Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$ (X ist eine Menge) nennt man auch eine **Folge** in X und schreibt statt $a(n)$ auch a_n und statt a auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Menge der Folgen in X bezeichnet man mit $X^{\mathbb{N}}$. Zu betrachten ist nun die Menge aller Folgen mit endlichem Träger

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \middle| a_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \right\}$$

zusammen mit den Operationen definiert über

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } \lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$[1].

Hinweis: Natürlich wäre es viel Arbeit, wenn man alle Axiome nachweisen müsste. Zum Glück geht das viel einfacher. Sie müssen benutzen, dass $\mathbb{R}^X = \operatorname{Abb}(X, \mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den kanonischen Operationen bildet (siehe Vorlesung). Dies dürfen Sie ohne Beweis benutzen (dies ist die Stelle, wo man viel Arbeit reinstecken müsste!). Mit dieser Tatsache und dem was Sie zu Untervektorräumen aus der Vorlesung kennen, lässt sich dies recht einfach zeigen.

Übungsaufgabe 2 (*Basen, Erzeugendensysteme und lineare Unabhängigkeit*) (20+5)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren in dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V linear unabhängig sind, Erzeugendensysteme oder Basen von V bilden (Wie immer mit Begründung!).

i. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^4$. Die zu untersuchenden Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

[1] Genauso bezeichnet man die Menge aller Funktionen $f\colon X \to Y$ auch mit $Y^X = \operatorname{Abb}(X, Y)$. Falls es in Y ein ausgezeichnetes Element $0 \in Y$ gibt, dann schreibt man $Y^{(X)}$ auch allgemein für die Menge aller Funktionen $f\colon X \to Y$ für die $f(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele $x \in X$ gilt. Diese Funktionen nennt man Funktionen mit endlichem Träger.

Bitte wenden!

ii. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{C}^2$ gegeben. Man betrachte die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

iii. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{C}^2$ gegeben. Man betrachte die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

iv. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ und $V = \mathbb{F}_2^3$ gegeben[2]. Die zu untersuchenden Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Man zeige, dass $e_0, ..., e_n \in P_n$ (siehe Aufgabe 1 (a), $n \in \mathbb{N}$ fest) definiert über $e_k(t) = t^k$ für $k = 0, ..., n$ eine Basis von P_n bildet[3].
Hinweis: Beim Beweis zur linearen Unabhängigkeit wird man an eine kritische Stelle stoßen (wenn man vorsichtig genug arbeitet). Wir werden später sehen, wie wir dies ohne Hilfe aus der Analysis mit etwas mehr Linearer Algebra beweisen können. Zunächst wollen wir diese Lücke aber mit Aussagen aus der Analysis schließen. Sie dürfen deshalb alle Aussagen aus Analysis I verwenden, die Sie bisher behandelt haben. Da nicht jeder diese Vorlesung besucht dürfen Sie auch folgende Aussagen aus der Schule verwenden (beide reichen für einen Beweis): Die erste Möglichkeit, mit welcher Sie die Lücke schließen könnten, wäre zu benutzen, dass Polynomfunktionen stetig sind. Insbesondere gilt also

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} p(t) = p(0)$$

für jedes $p \in P_n$. Die zweite Aussage, die Sie verwenden könnten wäre, dass die Polynomfunktionen differenzierbar sind und die Ableitungen die bekannten Ableitungen aus der Schule sind.

Übungsaufgabe 3 (*Eine Basis ist ein unverlängerbares linear unabhängiges System*) (5)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum für einen Körper $\mathbb{K}$. Weiter seien Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$ gegeben. Man zeige, dass diese Vektoren $v_1, ..., v_n$ genau dann eine Basis bilden, wenn für jedes $v \in V$ die Vektoren $v_1, ..., v_n, v$ linear abhängig sind aber $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig ist. Im letzteren Fall spricht man auch von einem unverlängerbarem linear unabhängigen System von Vektoren.

[2] Es ist $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper bestehend aus zwei Elementen, welchen Sie aus der Vorlesung kennen. Dies ist die übliche Bezeichnung für diesen Körper. Die Bezeichnung $\mathbb{F}$ ist an das englische Wort für Körper "field" angelehnt. Die Zwei im Index steht für die Anzahl der Elemente im Körper. Sie haben beispielsweise auf dem letzten Blatt $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_4$ kennen gelernt.

[3] Man beachte, dass $e_0(t) = t^0 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ nach Definition gilt.

Tutoriumsaufgabe 1 (*Nochmal zu Basen, Erzeugendensysteme und lineare Unabhängigkeit*)(0)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren in dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V linear unabhängig sind, Erzeugendensysteme oder Basen von V bilden (Wie immer mit Begründung!).

(a) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Die zu untersuchenden Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$. Die zu untersuchenden Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{C}^2$ gegeben. Man betrachte die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

(d) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{C}^2$ gegeben. Man betrachte die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

Tutoriumsaufgabe 2 (*Multiple-Choice*) (0)
Man entscheide jeweils, welche der folgenden Antwortmöglichkeiten richtig bzw. falsch sind. Geben Sie zudem eine kurze Begründung für ihre Wahl an.

(a) Wenn $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper ist, dann
□ ist $(\mathbb{K}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. □ folgt aus $xy = 0$ bereits $x = 0$ oder $y = 0$ für $x, y \in \mathbb{K}$.
□ ist $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe. □ folgt aus $x + x = 0$ bereits $x = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

(b) Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Für die folgenden Ausdrücke muss man voraussetzen, dass f bijektiv ist, damit diese definiert sind:
□ $f^{-1}(y)$ für $y \in Y$ □ $f^{-1}(\{y\})$ für $y \in Y$ □ $f^{-1}(N)$ für $N \subset Y$

(c) Es gibt eine bijektive Funktion
□ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. □ $f : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$. □ $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$.

(d) Jeder $\mathbb{R}$-Vektorraum ist endlich erzeugt.
□ wahr □ falsch

(e) Gegeben sei ein Erzeugendensystem $v_1, ..., v_n \in V$ eines Vektorraumes V. Weiter bleibe dies kein Erzeugendensystem, wenn man das System verkleinere (also mindestens einen Vektor entfernt). Dann bildet $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V.
□ wahr □ falsch