



Übungsblatt 5

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **18.11.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

Übungsaufgabe 1 (*Zeilenumformungen und Zeilenstufenform*) (10+2+3)

- (a) Man bestimme eine Zeilenstufenform, den Zeilenrang und eine Basis des Zeilenraumes der folgenden Matrizen mit Einträgen aus \mathbb{R} und gebe dabei die Umformungsschritte mit an:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) In der Vorlesung wurde der Zeilenraum einer Matrix definiert. Definieren Sie entsprechend den Spaltenraum einer Matrix.
- (c) Man finde eine 2×2 Matrix A mit Einträgen aus \mathbb{R} derart, dass sich bei der Umformung in die Zeilenstufenform der Spaltenraum ändert. Kann man auch ein Beispiel finden, wo die Umformung in die Zeilenstufenform den Zeilenraum verändert?

Übungsaufgabe 2 (*Ebenen in Vektorräumen*) (10+5)

In einem \mathbb{K} -Vektorraum V definieren wir eine Ebene E als eine Menge der Form

$$E = \{v + \alpha u + \beta w : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$$

mit $v, u, w \in V$ fest derart, dass u, w linear unabhängig sind.

- (a) Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum der Dimension 3 und $E_1, E_2 \subset V$ zwei Ebenen. Man zeige, dass genau einer der folgenden drei Fälle eintritt:
- $E_1 \cap E_2$ ist eine Gerade.
 - Die beiden Ebenen sind identisch, d.h. $E_1 = E_2$.
 - Die Ebenen sind verschieden aber parallel, d.h. $E_2 \neq E_1 = v + E_2 := \{v + u : u \in E_2\}$ für ein $v \in V$.
- (b) Man finde einen \mathbb{R} -Vektorraum V und zwei Ebenen $E_1, E_2 \subset V$ derart, dass keine der obigen drei Fälle eintritt.

Übungsaufgabe 3 (*Dimension und Basen von Vektorräumen*) (5+5+5*)

- (a) Man bestimme eine Basis und die Dimension des folgenden \mathbb{C} -Vektorraumes indem Sie eine geeignete Matrix auf Zeilenstufenform bringen:

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \\ 1-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3$$

Bitte wenden!

(b) Man bestimme eine Basis und die Dimension des folgenden \mathbb{R} -Vektorraumes:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \right\}$$

(c) Es sei V ein (nicht notwendigerweise endlich erzeugter) \mathbb{C} -Vektorraum. Man kann V auch als \mathbb{R} -Vektorraum auffassen. Man finde eine Formel für $\dim_{\mathbb{R}} V$ in Abhängigkeit von $\dim_{\mathbb{C}} V$ und beweise diese.

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1

(0)

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum.

- (a) Man zeige, dass genau dann $\dim V = \infty$ gilt, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ gibt.
- (b) Es sei U ein Untervektorraum von V und V sei endlich erzeugt. Man zeige, dass auch U endlich erzeugt ist.

Tutoriumsaufgabe 2

(0)

Man bestimme eine Basis und die Dimension des folgenden Untervektorraumes vom \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^5 indem Sie eine geeignete Matrix auf Zeilenstufenform bringen:

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$