ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 5

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **18.11.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Zeilenumformungen und Zeilenstufenform*) (10+2+3)

(a) Man bestimme eine Zeilenstufenform, den Zeilenrang und eine Basis des Zeilenraumes der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ und gebe dabei die Umformungsschritte mit an:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) In der Vorlesung wurde der Zeilenraum einer Matrix definiert. Definieren Sie entsprechend den Spaltenraum einer Matrix.

(c) Man finde eine 2×2 Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ derart, dass sich bei der Umformung in die Zeilenstufenform der Spaltenraum ändert. Kann man auch ein Beispiel finden, wo die Umformung in die Zeilenstufenform den Zeilenraum verändert?

Übungsaufgabe 2 (*Ebenen in Vektorräumen*) (10+5)

In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V definieren wir eine Ebene E als eine Menge der Form

$$E = \{v + \alpha u + \beta w : \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$$

mit $v, u, w \in V$ fest derart, dass u, w linear unabhängig sind.

(a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 3 und $E_1, E_2 \subset V$ zwei Ebenen. Man zeige, dass genau einer der folgenden drei Fälle eintritt:

i. $E_1 \cap E_2$ ist eine Gerade.

ii. Die beiden Ebenen sind identisch, d.h. $E_1 = E_2$.

iii. Die Ebenen sind verschieden aber parallel, d.h. $E_2 \neq E_1 = v + E_2 := \{v + u : \ u \in E_2\}$ für ein $v \in V$.

Hinweis: Wenn $E_i = \{v_i + \alpha u_i + \beta w_i : \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$ für $i = 1, 2$ ist, dann tritt gennau einer der Fälle ein: Entweder ist $\operatorname{span}\{u_1, w_1\} = \operatorname{span}\{u_2, w_2\}$ oder es ist $\operatorname{span}\{u_1, w_1\} \neq \operatorname{span}\{u_2, w_2\}$. Der erste Fall liefert ii. oder iii. und der andere Fall liefert i., wenn man benutzt, dass $\dim V = 3$ gilt. Achten Sie darauf, dass Sie in ihrem Beweis irgendwo benutzen müssen, dass u_1, w_1 und u_2, w_2 linear unabhängig sind!

(b) Man finde einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und zwei Ebenen $E_1, E_2 \subset V$ derart, dass keine der obigen drei Fälle eintritt.

Hinweis: Man gehe den Beweis in (a) durch und überlege sich, wo der Beweis schief geht, wenn $\dim V > 3$ ist. Dadurch kommt man auf die Idee, wie man die Ebenen setzen muss. Vergessen Sie nicht nachzuweisen, dass keiner der drei Fälle für ihr Beispiel eintritt.

Bitte wenden!

Übungsaufgabe 3 (*Dimension und Basen von Vektorräumen*) (5+5+5*)

(a) Man bestimme eine Basis und die Dimension des folgenden $\mathbb{C}$-Vektorraumes indem Sie eine geeignete Matrix auf Zeilenstufenform bringen:

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1-2i \\ 1-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3$$

(b) Man bestimme eine Basis und die Dimension des folgenden $\mathbb{R}$-Vektorraumes:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y + z = 0 \right\}$$

(c) Es sei V ein (nicht notwendigerweise endlich erzeugter) $\mathbb{C}$-Vektorraum. Man kann V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Man finde eine Formel für $\dim_{\mathbb{R}} V$ in Abhängigkeit von $\dim_{\mathbb{C}} V$ und beweise diese.
Hinweis: Machen Sie sich Beispiele um zu verstehen, was Sie tun müssen. Diese Aufgabe ist nicht so schwer!

Tutoriumsaufgabe 1 (0)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Man zeige, dass genau dann $\dim V = \infty$ gilt, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängige Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$ gibt.
Hinweis: Für die eine Richtung muss man eine Folgerung aus dem Basisaustauschsatz benutzen. Für die andere Richtung wähle man sich $n \in \mathbb{N}$ maximal mit der Eigenschaft, dass $v_1, ..., v_n \in V$ linear unabhängig sind (maximal linear unabhängig sollte einem bekannt vorkommen!).

(b) Es sei U ein Untervektorraum von V und V sei endlich erzeugt. Man zeige, dass auch U endlich erzeugt ist.
Hinweis: Dies ist mit der Aussage in Teil (a) nun einfach geworden.

Tutoriumsaufgabe 2 (0)

Man bestimme eine Basis und die Dimension des folgenden Untervektorraumes vom $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^5$ indem Sie eine geeignete Matrix auf Zeilenstufenform bringen:

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5\\0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\-1\\-1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\}$$

Hinweis: vgl. (6.8) und (6.5)