Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 7

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **2.12.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Matrizenmultiplikation*) (4+8+4+4)

(a) Man berechne $(AB)C$ und AC (falls möglich) für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Man berechne A^n, B^n für alle $n \in \mathbb{N}$ und C^8 für[1]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Es seien $F, \tilde{F}\colon V \to W$ und $G, \tilde{G}\colon U \to V$ linear und $\lambda \in \mathbb{K}$. Man beweise folgende Rechenregeln

$$\lambda(F \circ G) = (\lambda F) \circ G = F \circ (\lambda G), \; (F + \tilde{F}) \circ G = F \circ G + \tilde{F} \circ G \text{ und}$$

$$F \circ (G + \tilde{G}) = F \circ G + F \circ \tilde{G}.$$

(d) Es seien $A, D \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B, E \in \mathbb{K}^{n\times k}$, $C \in \mathbb{K}^{k\times l}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben. Man zeige

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \; (A + D)B = AB + DB$$

$$A(B + E) = AB + AE \text{ und } A(BC) = (AB)C.$$

Übungsaufgabe 2 (*Der Rang einer linearen Abbildung*) (5+5)

Wenn $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung ist, dann definieren wir

$$\operatorname{rg} F = \dim F(V)$$

und bezeichnen dies als den Rang von F.

---

[1] A^0 ist definiert als die Einheitsmatrix und mit $A^{n+1} := AA^n$ ist A^n definiert für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Berechnung von Matrixpotenzen ist eines der zentralen Themen der Linearen Algebra. Wir werden uns später Methoden erarbeiten, die es uns erlauben diese systematisch zu berechnen.

Bitte wenden!

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ man zeige $\operatorname{rg} F_A = \operatorname{rg} A$. Dabei ist $F_A\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ mit $F_A(x) = Ax$ wie in der Vorlesung gegeben.

(b) Es seien $G\colon V' \to V$ und $H\colon W \to W'$ zwei Vektorraumisomorphismen. Man zeige

$$\operatorname{rg} F = \operatorname{rg}(H \circ F \circ G).$$

Übungsaufgabe 3 (*Partialbruchzerlegung*) (5+5+5*)

Die Partialbruchzerlegung ist ein Verfahren eine rationale Funktion in einfachere Summanden zu zerlegen. Diese spielt insbesondere bei der Berechnung von Integralen eine Rolle.

(a) Es sei $p \in P_n$ und $q \in P_m$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{C}$

$$p(x) = c\prod_{k=1}^{n}(x - w_k),\ \ q(x) = d\prod_{l=1}^{m}(x - z_l)$$

für $n + m$ verschiedene Zahlen $z_1, ..., z_m, w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ (und $c, d \neq 0$) gilt. Man zeige, dass die folgende Abbildung ein Vektorraumisomorphismus ist

$$F\colon P_{n-1} \times P_{m-1} \to P_{n+m-1},\ \ (r, s) \mapsto rq + ps$$

und folgere daraus, dass man für eine Polynomfunktion f vom Grad $< n + m$ genau eine Wahl von Polynomfunktionen r, s mit Grad $< n$ resp. $< m$ hat, die

$$\frac{f(x)}{p(x)q(x)} = \frac{r(x)}{p(x)} + \frac{s(x)}{q(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $p(x)q(x) \neq 0$ erfüllen.

(b) Der Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz war (im frühen 18. Jahrhundert) der Meinung, dass der Ausdruck $(x^4 + a^4)^{-1}$ mit $a > 0$ nicht in Summanden der Form $(\gamma x + \delta)(x^2 + \alpha x + \beta)^{-1}$ für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ zerlegt werden kann. Beweisen Sie ihm das Gegenteil. Zerlegen Sie zudem explizit

$$\frac{1}{x^4 - 1}$$

in Summanden der Form $w(x - z)^{-1}$ für $w, z \in \mathbb{C}$.

(c) Man zeige die Aussage in (a) auch, wenn man nicht mehr annimmt, dass die $z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_m \in \mathbb{C}$ verschieden sind, sondern nur noch, dass $w_k \neq z_l$ für alle l, k gilt[2].

[2]Man kann zeigen, dass man jedes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerlegen kann (Fundamentalsatz der Algebra). Die wesentliche Einschränkung ist also die Bedingung $w_k \neq z_l$ für alle k, l. Mit anderen Worten nehmen wir also nur an, dass die Polynome teilerfremd sind.

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (0)

Berechnen Sie alle Produkte von je zwei der drei Matrizen, falls dies möglich ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tutoriumsaufgabe 2 (*Multiple-Choice*) (0)

Eine Frage der folgenden Form könnte in Klausuren vorkommen. Kreuzen Sie die Aussagen an, die Sie für richtig halten (so, dass Sie den Zettel beim Tutor abgeben können). Überlegen Sie sich zudem, ein Gegenbeispiel oder eine kurze Begründung für ihre Lösung. Diese wird dann in der Klausur wie folgt bewertet:

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe, wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.

(a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt
☐ $1 \cdot v = v$ ☐ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ ☐ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ ☐ $u + v = v$ impliziert $u = 0$

(b) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, ..., v_n \in V$ gegeben. Dann gilt $\dim V \leq n$, falls
☐ $v_1, ..., v_n$ eine Basis ist ☐ $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig ist ☐ $v_1, ..., v_n$ erzeugend ist

(c) Wir betrachten den $\mathbb{K}$-Vektorraum $V = \mathbb{K}^n$ und $v_1, ..., v_m \in V$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear abhängig, falls gilt
☐ $m > n$ ☐ Es gibt $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = 0$ ☐ Eine Matrix mit den Spalten $v_1, ..., v_m$ hat Rang $< m$ ☐ Eine Matrix mit den Spalten $v_1, ..., v_m$ hat Rang m

(d) Es sei V ein Vektorraum und $F\colon V \to V$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gilt
☐ F ist surjektiv ☐ $F(v) = 0$ impliziert $v = 0$ ☐ Wenn $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V ist, dann ist $F(v_1), ..., F(v_n)$ eine Basis von V ☐ $\ker F = \{0\}$

(e) Wenn man auf eine Matrix A Zeilenoperationen anwendet, dann bleibt erhalten
☐ der Zeilenraum ☐ der Spaltenraum ☐ der Zeilenrang ☐ der Spaltenrang

(f) Gesucht ist eine Polynomfunktion $p\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $p(x_1) = y_1$,...,$p(x_n) = y_n$ für gegebene $x_1, ..., x_n \in [0, 1]$ und $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ vom Grad höchstens m. Nun gilt
☐ Es existiert ein solches p falls $m \geq n$ ☐ Es existiert ein solches p falls $m \geq n - 1$ ☐ Es kann nur ein solches p geben, falls $m \leq n$ ☐ Es kann nur ein solches p geben, falls $m \leq n - 1$

(g) Es sei $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gilt ($v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$)
☐ $F(0) = 0$ ☐ $\dim W = \dim \ker F + \operatorname{rg} F$ ☐ $\dim V = \dim \ker F + \operatorname{rg} F$ ☐ $\lambda F(v) = F(\lambda v)$

(h) Es gibt eine surjektive Abbildung
☐ $f\colon \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ ☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ☐ $f\colon \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ☐ $f\colon \{1, 2\} \to \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

(i) Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann gilt
☐ $AB = BA$ ☐ $AB \neq 0$, falls $A, B \neq 0$ ☐ $A(B + C) = AB + AC$ ☐ $A(BC) = (AB)C$