



Übungsblatt 7 Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **2.12.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

Übungsaufgabe 1 (Matrizenmultiplikation)

(4+8+4+4)

(a) Man berechne $(AB)C$ und AC (falls möglich) für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es bietet sich an geschickt zu rechnen.

(b) Man berechne A^n , B^n für alle $n \in \mathbb{N}$ und C^8 für¹

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Bei A^n und B^n erkennt man ein Muster, wenn man nur genügend Potenzen berechnet hat. Bei der Berechnung von C^8 sollte man sich überlegen, wie man das geschickt rechnen kann.

(c) Es seien $F, \tilde{F}: V \rightarrow W$ und $G, \tilde{G}: U \rightarrow V$ linear und $\lambda \in \mathbb{K}$. Man beweise folgende Rechenregeln

$$\lambda(F \circ G) = (\lambda F) \circ G = F \circ (\lambda G), (F + \tilde{F}) \circ G = F \circ G + \tilde{F} \circ G \text{ und}$$

$$F \circ (G + \tilde{G}) = F \circ G + F \circ \tilde{G}.$$

(d) Es seien $A, D \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B, E \in \mathbb{K}^{n \times k}$, $C \in \mathbb{K}^{k \times l}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben. Man zeige

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), (A + D)B = AB + DB$$

$$A(B + E) = AB + AE \text{ und } A(BC) = (AB)C.$$

Übungsaufgabe 2 (Der Rang einer linearen Abbildung)

(5+5)

Wenn $F: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung ist, dann definieren wir

$$\text{rg } F = \dim F(V)$$

und bezeichnen dies als den Rang von F .

¹ A^0 ist definiert als die Einheitsmatrix und mit $A^{n+1} := AA^n$ ist A^n definiert für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Berechnung von Matrixpotenzen ist eines der zentralen Themen der Linearen Algebra. Wir werden uns später Methoden erarbeiten, die es uns erlauben diese systematisch zu berechnen.

- (a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ man zeige $\text{rg } F_A = \text{rg } A$. Dabei ist $F_A: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $F_A(x) = Ax$ wie in der Vorlesung gegeben.
- (b) Es seien $G: V' \rightarrow V$ und $H: W \rightarrow W'$ zwei Vektorraumisomorphismen. Man zeige

$$\text{rg } F = \text{rg}(H \circ F \circ G).$$

Hinweis: Sie müssen sich nur überlegen, wie sich das Bild von F und $F \circ G$ unterscheidet, und was mit der Dimension des Bildes von F passiert, wenn man H darauf anwendet.

Übungsaufgabe 3 (*Partialbruchzerlegung*) (5+5+5*)

Die Partialbruchzerlegung ist ein Verfahren eine rationale Funktion in einfachere Summanden zu zerlegen. Diese spielt insbesondere bei der Berechnung von Integralen eine Rolle.

- (a) Es sei $p \in P_n$ und $q \in P_m$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{C}$

$$p(x) = c \prod_{k=1}^n (x - w_k), \quad q(x) = d \prod_{l=1}^m (x - z_l)$$

für $n + m$ verschiedene Zahlen $z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ (und $c, d \neq 0$) gilt. Man zeige, dass die folgende Abbildung ein Vektorraumisomorphismus ist

$$F: P_{n-1} \times P_{m-1} \rightarrow P_{n+m-1}, \quad (r, s) \mapsto rq + ps$$

und folgere daraus, dass man für eine Polynomfunktion f vom Grad $< n + m$ genau eine Wahl von Polynomfunktionen r, s mit Grad $< n$ resp. $< m$ hat, die

$$\frac{f(x)}{p(x)q(x)} = \frac{r(x)}{p(x)} + \frac{s(x)}{q(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $p(x)q(x) \neq 0$ erfüllen.

Hinweis: Die Linearität zeigt man leicht. Nun muss man sich noch um die Injektivität kümmern (hier sollte man die w_k und z_l einsetzen und den Interpolationssatz benutzen). Den Rest kriegt man geschenkt (warum?). Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $V \times W$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein \mathbb{K} -Vektorraum bildet, wenn V, W \mathbb{K} -Vektorräume sind und, dass $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$ gilt.

- (b) Der Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz war (im frühen 18. Jahrhundert) der Meinung, dass der Ausdruck $(x^4 + a^4)^{-1}$ mit $a > 0$ nicht in Summanden der Form $(\gamma x + \delta)(x^2 + \alpha x + \beta)^{-1}$ für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ zerlegt werden kann. Beweisen Sie ihm das Gegenteil. Zerlegen Sie zudem explizit

$$\frac{1}{x^4 - 1}$$

in Summanden der Form $w(x - z)^{-1}$ für $w, z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Sie müssen nur den Nenner in Produkte zerlegen, dann wissen Sie aus (a), wie sie den Ausdruck zerlegen können.

- (c) Man zeige die Aussage in (a) auch, wenn man nicht mehr annimmt, dass die $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m \in \mathbb{C}$ verschieden sind, sondern nur noch, dass $w_k \neq z_l$ für alle l, k gilt².

Hinweis: Der Beweis der Injektivität wird nun schwerer. Man kann aber den Beweis in (a) anpassen. Dazu ist es nützlich ein Hilfsresultat zu zeigen. Für eine Polynomfunktion p folgt aus $p(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{C}$ bereits $p(x) = (x - x_0)q(x)$ (für alle $x \in \mathbb{C}$) für eine geeignete Polynomfunktion q .

²Man kann zeigen, dass man jedes Polynom mit Koeffizienten in \mathbb{C} in Linearfaktoren zerlegen kann (Fundamentalsatz der Algebra). Die wesentliche Einschränkung ist also die Bedingung $w_k \neq z_l$ für alle k, l . Mit anderen Worten nehmen wir also nur an, dass die Polynome teilerfremd sind.

Tutoriumsaufgabe 1

(0)

Berechnen Sie alle Produkte von je zwei der drei Matrizen, falls dies möglich ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tutoriumsaufgabe 2 (Multiple-Choice)

(0)

Eine Frage der folgenden Form könnte in Klausuren vorkommen. Kreuzen Sie die Aussagen an, die Sie für richtig halten (so, dass Sie den Zettel beim Tutor abgeben können). Überlegen Sie sich zudem, ein Gegenbeispiel oder eine kurze Begründung für ihre Lösung. Diese wird dann in der Klausur wie folgt bewertet:

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe, wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetztem oder fehlendem Kreuz wird ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.

- (a) Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt
 $1 \cdot v = v$ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ $u + v = v$ impliziert $u = 0$
- (b) Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ gegeben. Dann gilt $\dim V \leq n$, falls
 v_1, \dots, v_n eine Basis ist v_1, \dots, v_n linear unabhängig ist v_1, \dots, v_n erzeugend ist
- (c) Wir betrachten den \mathbb{K} -Vektorraum $V = \mathbb{K}^n$ und $v_1, \dots, v_m \in V$. Dann sind v_1, \dots, v_m linear abhängig, falls gilt
 $m > n$ Es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=1}^m \alpha_k v_k = 0$ Eine Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_m hat Rang $< m$ Eine Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_m hat Rang m
- (d) Es sei V ein Vektorraum und $F: V \rightarrow V$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gilt
 F ist surjektiv $F(v) = 0$ impliziert $v = 0$ Wenn v_1, \dots, v_n eine Basis von V ist, dann ist $F(v_1), \dots, F(v_n)$ eine Basis von V $\ker F = \{0\}$
- (e) Wenn man auf eine Matrix A Zeilenoperationen anwendet, dann bleibt erhalten
 der Zeilenraum der Spaltenraum der Zeilenrang der Spaltenrang
- (f) Gesucht ist eine Polynomfunktion $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$ für gegebene $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ vom Grad höchstens m . Nun gilt
 Es existiert ein solches p falls $m \geq n$ Es existiert ein solches p falls $m \geq n - 1$ Es kann nur ein solches p geben, falls $m \leq n$ Es kann nur ein solches p geben, falls $m \leq n - 1$
- (g) Es sei $F: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Es gilt ($v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$)
 $F(0) = 0$ $\dim W = \dim \ker F + \text{rg } F$ $\dim V = \dim \ker F + \text{rg } F$ $\lambda F(v) = F(\lambda v)$
- (h) Es gibt eine surjektive Abbildung
 $f: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ $f: \{1, 2\} \rightarrow \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- (i) Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann gilt
 $AB = BA$ $AB \neq 0$, falls $A, B \neq 0$ $A(B + C) = AB + AC$ $A(BC) = (AB)C$