Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 8

Lineare Algebra 1

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **9.12.2015** um spätestens **16ct**.

Notwendige Daten auf dem Deckblatt: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

Übungsaufgabe 1 (*Invertierbare Matrizen - Berechnungen*) (6+7+7)

(a) Welche der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ sind invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Man berechne die Inverse (falls existent) von:

$$\begin{pmatrix} 1+i & i & 1 & 0 \\ i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

(c) Man gebe die inverse Funktion (falls existent) der linearen Abbildung $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$F(a,b,c,d) = (a+b-c, b+c+d, a+b+c+d, a-c+d)$$

für $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ an.

Übungsaufgabe 2 (*Invertierbare Matrizen - Theorie*) (5+5*+5)

(a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Man zeige, dass $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ äquivalent dazu ist, dass es ein $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit $BA = E_n$ und dies wiederum dazu äquivalent ist, dass es ein $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt mit $AC = E_n$. Zeigen Sie zudem, dass in dem Fall aus $BA = E_n$ und $AC = E_n$ bereits $A^{-1} = B = C$ folgt.
Hinweis: Aussagen über lineare Abbildungen übertragen sich auf Matrizen (wie?).

(b) Man finde den genauen Fehler in folgendem falschen Teilbeweis von (a): Die Menge

$$G := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | \exists B \in \mathbb{K}^{n\times n} :\ BA = E_n\}$$

zusammen mit der Matrixmultiplikation (Assoziativität ist damit klar) ist eine Gruppe, weil $E_n \in G$ ein links-neutrales Element ist und nach Definition von G jedes $A \in G$ auch ein linksinverses Element B besitzt. Deshalb ist B auch eine Rechtsinverse (Kapitel 3 - Folgerung nach der Definition der Gruppe) und somit ist die erste Äquivalenz in (a) bewiesen.
Hinweis: Diese Aufgabe ist nicht wirklich schwer, also keine übliche Bonusaufgabe!

Bitte wenden!

(c) Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times m}$ und $C \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Wir betrachten die geblockte Matrix

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass die dreiecksgeblockte Matrix D genau dann invertierbar ist, wenn es A und B sind und finde eine Formel für die Inverse.

Übungsaufgabe 3 (*Affine Unterräume*) (5+5)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Man nennt $A \subset V$ einen **affinen Unterraum**, falls $A \neq \emptyset$ und für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ gilt[1].

(a) Man zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Untervektorraum U gibt mit $A = a + U$ für ein geeignetes $a \in A$. Wir setzen noch $\dim A := \dim U$.

(b) Es seien $A_1, A_2 \subset V$ zwei affine Unterräume mit $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Man zeige, dass $A_1 \vee A_2$ und $A_1 \cap A_2$ affin sind und die folgende Dimensionsformel

$$\dim(A_1 \vee A_2) + \dim(A_1 \cap A_2) = \dim A_1 + \dim A_2$$

gilt. Dabei ist $A_1 \vee A_2 = \{\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 : \ \lambda \in \mathbb{K},\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2\}$.
Hinweis: Man benutze Tutoriumsaufgabe 1 (b) und reduziere die Behauptung auf den Fall von Untervektorräumen.

[1] Die Voraussetzung an die Charakteristik ist nur der Einfachheit halber. Ohne die Voraussetzung muss man statt "mit $x, y \in A$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$" die Bedingung "mit $x_1, ..., x_n \in A$ und $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ ist auch $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$" voraussetzen. Entsprechende Änderungen muss man auch in der Definition von $A_1 \vee A_2$ vornehmen.

Bitte wenden!

Tutoriumsaufgabe 1 (0)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.

(a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Man zeige, dass jede Menge von der Form $A = a + U$ für ein $a \in V$ und einen Untervektorraum U ein affiner Unterraum ist.

(b) Es sei weiter $b \in A$. Man zeige, dass dann auch $A = b + U$ gilt.

(c) Man zeige, dass eine Gerade nichts anderes als ein affiner Unterraum der Dimension 1 und eine Ebene nichts anderes als ein affiner Unterraum der Dimension 2 ist.

Tutoriumsaufgabe 2 (0)

Man entscheide welche der folgenden Matrizen invertierbar sind und gebe gegebenenfalls die Inverse an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$