Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

# Übungsblatt 9

**Lineare Algebra 1**

Die Abgabe der Übungsaufgaben ist einzeln am Mittwoch **16.12.2015** um spätestens **16ct**.

---

*Notwendige Daten auf dem Deckblatt*: Name; E-Mail-Adresse; Namen der Teammitglieder; Tutorname; Tutoriumsnummer; Aufgaben für die Sie zuständig sind

---

**Übungsaufgabe 1** (*Gleichungssysteme lösen*) (8+8+7)

Entscheiden Sie (ohne die Lösung explizit zu berechnen) im Teil (a) und (b) welche Struktur[1] die Lösungsmenge hat und berechnen Sie danach die Lösungsmengen aller Teile in Parameterform[2].

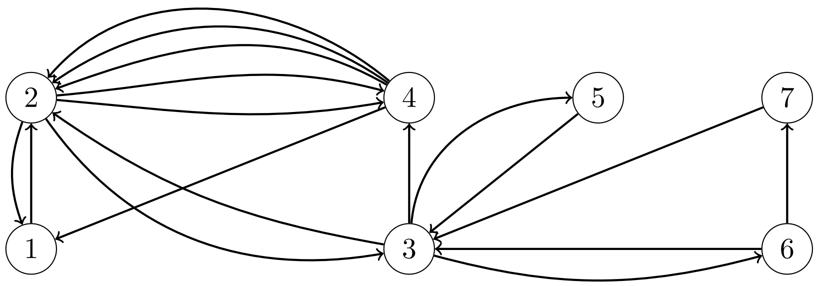
(a) Gesucht ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie zudem eine Parametrisierung der $c \in \mathbb{R}^4$ mit $\text{Lös}(A, c) \neq \emptyset$ an?

(b) Gesucht sind alle $p \in P_n(\mathbb{R})$ (für $n = 2, 3, 4$) mit $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(-1) = -3$ und $p(2) = 3$. Schreiben Sie dabei die Bedingungen um in Gleichungen für die Koeffizenten von $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(x \in \mathbb{R})$.

(c) Gesucht sind die PageRanks $\omega_k$ $(k = 1, ..., 7$; siehe Blatt 6) von folgendem Netz:




Vergleichen Sie dies auch mit der schlechteren Bedingung $\tilde{\omega}_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl}$ an die PageRanks, die in Blatt 6 Übungsaufgabe 2 (c) erwähnt wird.

**Übungsaufgabe 2** (*Erneut: Summe und Schnitt von Untervektorräumen*) (7+5)

(a) Man berechne eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ der folgenden reellen Untervektorräume von $\mathbb{R}^6$:

$$U_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \; U_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

[1] Ist die Menge leer? Handelt es sich um einen affinen Raum? Wenn ja, von welcher Dimension?

[2] Wir meinen mit einer Parametrisierung stets eine Parametrisierung affin in den Parametern mit minimaler Anzahl an Parametern (also derart, wie Sie der Gauß-Algorithmus berechnet).

**Bitte wenden!**

(b) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$. Man bestimme die Dimension der Untervektorräume

$$U_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \ A^T = A\},\ U_2 = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : \ A^T = -A\}$$

von $\mathbb{K}^{n\times n}$ und zeige $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{K}^{n\times n}$.

**Übungsaufgabe 3** (*Affine Abbildungen*) (5+10*)

Es seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume für einen Körper $\mathbb{K}$ mit $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ sowie $A_1 = a_1 + U_1 \subset V$ und $A_2 = a_2 + U_2 \subset W$ affine Unterräume mit assoziierten Untervektorräumen $U_1, U_2$. Eine Abbildung $f\colon A_1 \to A_2$ heißt **affin**, falls $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ sowie $x, y \in A_1$ gilt[3].

(a) Man zeige, dass (dies ist der lineare Teil von $f$)

$$F(u) := f(a+u) - f(a)$$

für $u \in U_1$ unabhängig von $a \in A_1$ ist, eine lineare Abbildung $F\colon U_1 \to U_2$ definiert und $f$ genau dann bijektiv (bzw. injektiv bzw. surjektiv) ist, wenn $F$ bijektiv (bzw. injektiv bzw. surjektiv) ist[4].

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es für jede reelle Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ genau eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+2} = \lambda x_{n+1} + x_n + y_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x_0 = a,\ x_{1000000} = b?^5$$

[3] Die Bedingung an die Charakteristik ist wieder nur deshalb gegeben, dass man nur zwei Summanden verwenden muss. Die typische Anwendungen finden sich für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, wo es dann von Vorteil ist, dass man nur zwei Summanden hat.

[4] Man vergleiche dies mit Blatt 1 Tutoriumsaufgabe 2.

[5] Dies ist ein Randwertproblem für eine lineare Differenzengleichung. Randwertprobleme für gewöhnliche Differenzialgleichungen, wie sie eventuell später lernen werden, lassen sich mit derselben Methode behandeln. Solche Randwertprobleme kommen auf natürliche Weise in Physik, Partiellen Differenzialgleichungen, Finanzmathematik, Ingenieurwesen, Kontrolltheorie ... vor.

**Tutoriumsaufgabe 1** (*Zusammenfassung II*) (0)
Man schreibe sich eine Zusammenfassung des Vorlesungs- und Übungsstoffes bis zum 11.12. und lerne alle relevanten Definitionen und Sätze. Falls dazu Unklarheiten bestehen sollten, dann bereiten Sie dazu Fragen für das Tutorium vor.
*Bemerkung:* Zu dieser Aufgabe wird es keine Musterlösung geben. Sie sollten diese Zusammenfassung selber erstellen.

**Tutoriumsaufgabe 2** (*Lösbarkeit von Gleichungssystemen*) (0)
Welche der folgenden Gleichungssysteme sind lösbar? Ist die Lösung eindeutig?

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&0&2\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&1&0&3\\1&1&1&0&1\\1&0&1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Für welche anderen Inhomogenitäten gibt es Lösungen? Sind die Lösungen dann auch eindeutig?

**Tutoriumsaufgabe 3** (*Darstellungsmatrizen*) (0)
Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen zu folgenden linearen Abbildungen und angegebenen Basen.

(a) $F\colon V \to W$ mit $F(p)(x) = xp(x) + p(x)$ (für $x \in \mathbb{R}$), $V = P_3(\mathbb{R}) = \langle\langle e_0, e_1, e_2, e_3\rangle\rangle$ und $W = P_4(\mathbb{R}) = \langle\langle e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\rangle\rangle$.
(b) $G\colon V \to W$ mit $G(p) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$, $V = P_3(\mathbb{R}) = \langle\langle e_0, e_1, e_2, e_3\rangle\rangle$ und $W = \mathbb{R}^4 = \langle\langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle\rangle$.