ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Erste Klausur Lineare Algebra 1

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100 Punkte sind 100%.

Aufgabe 1 (*Gleichungssysteme*) (10+5)

(a) Man gebe eine Parametrisierung der $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ an, für welche gilt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \end{array}$$

(b) Ist $\text{Lös}(A, b)$ eine Ebene? Begründen Sie ihre Entscheidung. Dabei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*Diagonalisierung*) (25+10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie eine explizite Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ an für welche $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. *Hinweis:* Achten Sie auf die Spalten 1 und 2 von A bei der Berechnung von p_A.

(b) Welche der Matrizen B_1, B_2 und B_3 sind reell und welche komplex diagonalisierbar?

Aufgabe 3 (*Darstellungsmatrizen*) (10+5+5)

Man betrachte die lineare Abbildung

$$f\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \ f\colon p \mapsto p(2) + 2p - p'$$

auf dem Raum der Polynomfunktionen $P_3(\mathbb{R})$ mit der Basis $\mathcal{B} = (e_3, e_2, e_1, e_0)$, wobei $e_k(x) = x^k$ für $k = 0, 1, 2, 3$ gilt. Achten Sie jeweils darauf, Ihre Ergebnisse zu folgenden Aufgaben zu begründen!

(a) Man berechne die Darstellungsmatrix $A = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

(b) Für die Matrix A aus Teil (a) wurde der Eigenvektor $(0, 0, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ zum Eigenwert λ berechnet. Geben Sie einen Eigenvektor von f zum selben Eigenwert λ an und finden Sie λ.

(c) Die Matrix A aus Teil (a) ist nicht diagonalisierbar. Gibt es eine Basis $\mathcal{A}$ von $P_3(\mathbb{R})$ derart, dass $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ diagonal ist?

Aufgabe 4 (*Eigenwerte und Nullstellen des charakteristischen Polynoms*) (10)

Die folgende Aussage haben Sie bereits in der Vorlesung bewiesen. Beweisen Sie die Aussage erneut. Benutzen Sie dabei keine Aussagen über Eigenwerte oder das charakteristische Polynom, sondern argumentieren Sie auf Basis der folgenden Definitionen. Wir sagen $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, falls es ein $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Av = \lambda v$. Weiter definieren wir $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Man zeige $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $p_A(\lambda) = 0$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (*Lineare Abbildungen auf invarianten Unterräumen*) (10+10)

Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Weiter sei $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $f(U) \subset U$ und $g\colon U \to U$ definiert über $g(u) = f(u)$ für $u \in U$, d.h. g ist die Restriktion von f auf U.

(a) Man zeige, dass $p_f(\lambda) = p_g(\lambda)q(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt. Dabei ist q ein geeignetes Polynom.
(b) Es sei f diagonalisierbar. Man zeige, dass g diagonalisierbar ist.

Hinweis: Man komplementiere eine Basis von U zu einer Basis von V und argumentiere auf einer entsprechenden Darstellungsmatrix (oder der Transponierten der Darstellungsmatrix in (b)).

Aufgabe 6 (*Multiple-Choice*) (21)

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe (3 Punkte), wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird Ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.
Die Antworten sind auf ein gesondertes Antwortblatt für diese Aufgabe einzutragen.

(a) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt:
☐ $1 \cdot v = v$ ☐ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ ☐ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
☐ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ ☐ $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ ☐ V ist endlich erzeugt

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Welche Rechenregeln für die Determinante sind richtig?
☐ $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ ☐ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ ☐ $\det(AB) = \det B \cdot \det A$
☐ $\det(A + B) = \det A + \det B$ ☐ $\det C^{-1} = (\det C)^{-1}$ ☐ $\det(C^2) > 0$

(c) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n = \dim V < \infty$, $v_1, ..., v_m \in V$ linear unabhängig und $w_1, ..., w_k \in V$ erzeugend. Dann gilt:
☐ V ist endlich erzeugt ☐ $m \leq n$ ☐ $m \geq n$
☐ V ist isomorph zu $\mathbb{K}^n$ ☐ $k \leq n$ ☐ $k \geq n$

(d) Welche der folgenden Aussagen über Dimensionen sind richtig? Hierbei ist $P_n(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$.
☐ $\dim_{\mathbb{R}} P_n(\mathbb{R}) = n$ ☐ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ ☐ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = n + 1$
☐ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ ☐ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n\times m} = nm$ ☐ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n\times m} = n + m$

(e) Über die Diagonalisierbarkeit einer quadratischen komplexen Matrix A kann man folgende Aussagen treffen:
☐ A ist diagonalisierbar, falls p_A keine mehrfache Nullstelle hat.
☐ A ist diagonalisierbar, falls $S, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ existieren, sodass SAT diagonal ist.
☐ A ist diagonalisierbar, falls es eine Basis von Eigenvektoren gibt.
☐ Gilt $A^5 = 0$ aber $A \neq 0$, dann ist A nicht diagonalisierbar.
☐ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einen komplexen nicht-reellen Eigenwert, dann ist A komplex diagonalisierbar.
☐ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nur zwei verschiedene Eigenwerte, dann ist A nicht komplex diagonalisierbar.

(f) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Abbildung. Dann gilt:
☐ f ist affin. ☐ f ist linear. ☐ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 2$ und $f(0) = 0$.
☐ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 3$ und $f(0) = 0$. ☐ Alle Eigenwert von f sind reell, falls f linear ist. ☐ Alle Eigenwerte haben Betrag 1, falls f linear ist.

(g) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es gelte $A^T = A$ und $B^T = B$. Dann gilt:
☐ A ist diagonalisierbar. ☐ B ist diagonalisierbar. ☐ Es gibt $S \in O(n)$ mit SBS^T diagonal.
☐ Es gibt $S \in SO(n)$ mit SBS^T diagonal. ☐ Es gibt $S, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit SAT diagonal.
☐ Alle Eigenwerte von B sind reell.

Viel Erfolg! (Σ 121)