ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

# Zweite Klausur Lineare Algebra 1

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100 Punkte sind 100%.

## Inhaltsverzeichnis

**Aufgabe 1** (*Gleichungssysteme*) (10)

Man gebe eine Parametrisierung der $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ an, für welche gilt:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & & = & 0 \end{array}$$

*Lösung von Aufgabe 1:* Das Gleichungssystem schreibt sich als $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden nun den Gauß-Algorithmus an, um dieses Gleichungssystem zu lösen. In einem ersten Schritt bringen wir die erweiterte Matrix $(A|b)$ auf Zeilenstuffenform über elementare Zeilenumformungen.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können nun eine spezielle Lösung ablesen (über Rückwärtssubstitution; Nicht-Pivot-Variablen auf 0 gesetzt). Diese ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des homogenen Systems bekommen wir erneut durch Rückwärtssubstitution (Genau eine Nicht-Pivot-Variable auf $\neq 0$ setzen). Dabei erhalten wir die Basis

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine Parametrisierung der gesuchten Lösungsmenge gegeben durch

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

**Aufgabe 2** (*Diagonalisierung*) (15+25)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & \pi & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Welche der Matrizen $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ sind komplex, welche reell und welche orthogonal diagonalisierbar?

(b) Man gebe eine konkrete Drehmatrix $S \in \mathrm{SO}(3)$ und eine Diagonalmatrix $D$ an mit $B = SDS^{-1}$. Dabei ist $B$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Lösung von Aufgabe 2:*

**ad (a):**

Wir kommen zunächst zur orthogonalen reellen Diagonalisierbarkeit. Nach dem Spektralsatz ist eine reell Matrix genau dann reell orthogonal diagonalisierbar, wenn diese symmetrisch ist. Die einzige unter den Matrizen, die symmetrisch ist, ist die Matrix $A_4$. Damit ist also die Matrix $A_4$ auch die einzige, die reell orthogonal diagonalisierbar ist.

Die Matrix $A_4$ ist reell diagonalisierbar, weil diese orthogonal reell diagonalisierbar ist. Desweiteren ist die Matrix $A_3$ reell diagonalisierbar, weil diese 4 verschiedene reelle Eigenwerte (5, 3, 0, 1; also die Diagonaleinträge der oberen Dreiecksmatrix) hat. Die Matrizen $A_1$ (weil diese nichtmal komplex diagonalisierbar ist; siehe unten für Beweis) und $A_2$ (weil diese nicht-reellen Eigenwerte hat; siehe unten für Beweis) dagegen sind nicht reell diagonalisierbar.

Die Matrizen $A_4$ und $A_3$ sind komplex diagonalisierbar, weil diese auch reell diagonalisierbar sind.

Wir zeigen zunächst, dass die Matrix $A_1$ nicht komplex diagonalisierbar ist. Zunächst ist wegen

$$p_{A_1}(\lambda) = \left(\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right)^2 = (\lambda^2 - 2\lambda)^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$$

die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 0 genau 2. Dagegen ist die geometrische Vielfachheit gleich

$$4 - \mathrm{rg}(A_1 - 0 \cdot E_4) = 4 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Weil für jeden Eigenwert einer diagonalisierbaren Matrix die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen müssen, kann die Matrix $A_1$ nicht diagonalisierbar sein.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass $A_2$ kompex diagonalisierbar ist und einen nicht-reellen Eigenwert hat.

$$p_{A_2}(\lambda) = \left(\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right)^2 = ((\lambda-1)^2 + 1)^2$$

Damit sind die Eigenwerte von $A_2$ genau $1+i$ und $1-i$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Wir zeigen nun noch, dass die geometrischen Vielfachheiten ebenfalls zwei sind. Damit wäre dann bewiesen, dass die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwertes identisch sind. Folglich wäre $A_2$ komplex diagonalisierbar. Die gemetrische Vielfachheit der

Eigenwerte ist gegeben durch

$$4 - \mathrm{rg}(A_1 - (1 \pm i) \cdot E_4) = 4 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \mp i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \mp i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \mp i \end{pmatrix} = 4 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \mp i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Dies war zu beweisen. Folglich ist $A_2$ komplex diagonalisierbar und besitzt einen nicht-reellen Eigenwert (hat sogar keinen reellen Eigenwert).

**ad (b):** Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix $B$:

$$\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (4-\lambda)\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (4-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (4-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $B$ ergeben sich als Nullstellen von $p_B$ zu 4 (algebraische Vielfachheit 1) und 1 (algebraische Vielfachheit 2). Eine Basis des Eigenraumes zu 4 ergibt sich mittels der Umformung

$$B - 4E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{(MZ)}}{\mapsto} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu (Gauß-Algorithmus)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und eine Basis des Eigenraumes zu 1 ist wegen der Umformung

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben durch (wieder Gauß-Algorithmus angewendet)

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir die Vektoren bereits normiert. Um $u_2, u_3$ orthogonal zu machen ersetzen wir $u_3$ durch die normierte Version $\tilde{u}_3$ von (Gram-Schmidt-Verfahren!)

$$u_3 - \langle u_3, u_2 \rangle u_2 = u_3 - \frac{1}{2} u_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

welche gegeben ist durch

$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit ist also nach Konstruktion

$$B = SDS^{-1}$$

für

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \tilde{u}_3 \end{pmatrix}.$$

Weil $u_1, u_2, u_3$ orthonormal sind, ist $S \in \mathrm{O}(3)$. Wir müssen nun noch $S \in \mathrm{SO}(3)$ zeigen. Dies ist klar, weil

$$\det S = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = 1$$

gilt. Wäre $\det S = -1$, dann hätte man $u_2$ und $\tilde{u}_3$ vertauschen können und hätte wieder eine Matrix aus $\mathrm{SO}(3)$ erhalten.

**Aufgabe 3** (*Darstellungsmatrizen*) (10+5+5)
Gegeben sei eine lineare Abbildung $f\colon P_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit

$$f(p) = \begin{pmatrix} p(1) - p(-1) & 2p(0) & p'(0) - p(0) \\ p(2) + p(1) & p(-2) - p(1) & p(3) - p(0) \end{pmatrix}$$

für $p \in P_5(\mathbb{R})$. Weiter sei $\mathcal{A} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ die Standardbasis von $P_5(\mathbb{R})$ definiert über $e_k(x) = x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Zudem sei die Basis

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^{2\times 3}$ gegeben.

(a) Man bestimme $A = A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$. Begründen Sie die Einträge der Matrix!
(b) Für die Matrix $A$ aus (a) gilt $\text{Lös}(A, 0) = \{0\}$ (dies muss nicht bewiesen werden). Man folgere aus dieser Aussage, dass $f$ injektiv ist.
(c) Ist $f$ ein linearer Isomorphismus? Begründen Sie Ihre Behauptung.

*Lösung von Aufgabe 3:*
**ad (a):**
Es ist

$$\begin{aligned} f(e_0) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Einträge der ersten Spalte der Matrix $A$ sind also die Koeffizienten der Eintwicklung. Genauso bekommt man die anderen Spalten (nach der Reihe):

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(e_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 27 \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ 9\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 9\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 27\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & 15 & 81 \end{pmatrix} \\
&= 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ 17\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 15\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 81\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(e_5) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 33 & -33 & 243 \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ 33\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 33\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 243\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
A = A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 9 & 17 & 33 \\ 0 & -3 & 3 & -9 & 15 & -33 \\ 0 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \end{pmatrix}
$$

**ad (b):**
Es ist $f$ genau dann injektiv, wenn $f(p) = 0$ für ein $p \in \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ schon $p = 0$ impliziert (weil $f$ linear ist). Nach dem "Wörterbuch" ist die Gleichung $f(p) = 0$ aber äquivalent zu $Ax = 0$, wobei $x$ der Koordinatenvektor von $p$ bezüglich $\mathcal{A}$ ist. Nach Angabe folgt also aus $f(p) = 0$ und damit $Ax = 0$ bereits $x = 0$. Dies bedeutet aber, dass $p = 0$ gilt (was zu zeigen war).
**ad (c):**
Es ist $f$ linear und nach (b) injektiv. Weiter ist $\dim P_5(\mathbb{R}) = 6 = \dim \mathbb{R}^{2\times 3}$. Nach der Rangformel (bzw. nach Vorlesung) folgt also, dass $f$ surjektiv ist. Damit ist $f$ bijektiv und linear und damit ein Vektorraumisomorphismus.

**Aufgabe 4** (*Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren*) (10)
Die folgende Aussage wurde in der Vorlesung und in einer allgemeineren Form in der Übung bewiesen. Sie sollen diese Aussage nun erneut beweisen. Verwenden Sie daher keine weiteren Aussagen über Eigenvektoren und Eigenwerte als die Definition. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $v_1, ..., v_m \in \mathbb{K}^n$ Eigenvektoren von $A$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Weiter sei $\lambda_i \neq \lambda_j$, falls $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig sind.

*Lösung von Aufgabe 4:* Wir beweisen die Aussage mittels Induktion nach $m$. Im Falle $m = 1$ ist die Aussage klar, weil für einen Eigenvektor $v_1 \neq 0$ gilt.
Es sei nun die Aussage für den Fall $m - 1$ statt $m$ bewiesen. Wir leiten nun die Aussage für $m$ her. Dazu geben wir uns $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$ vor mit

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = 0.$$

Wir wenden nun $A$ auf die Glechung an und erhalten

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_k v_k = 0.$$

Folglich ist auch

$$\sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_m) v_k = 0.$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung folgt $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_m) = 0$ und damit $\alpha_k = 0$ für alle $k = 1, ..., m-1$. Dann ist aber auch $\alpha_m v_m = 0$. Weil aber $v_m \neq 0$ ist, folgt $\alpha_m = 0$. Die einzige Linearkombination, welche 0 ergibt ist also die triviale. Dies ist genau die Lineare Unabhängigkeit der Vektoren.

**Aufgabe 5** (*Matrizen mit vorgegebener algebraischer Identität*) (20)
Es sei $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit der Eigenschaft $A^n = A^{n+1}$ für ein $n \geq 1$. Man zeige, dass $A$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn $A^2 = A$ gilt.

*Lösung von Aufgabe 5:* Es sei $\lambda \in \sigma(A)$ beliebig. Dann gibt es einen Eigenvektor $v \neq 0$ zum Eigenwert $\lambda$, d.h. es gilt $Av = \lambda v$. Es ist damit

$$\lambda^n v = A^n v = A^{n+1} v = \lambda^{n+1} v.$$

Weil $v \neq 0$ ist, folgt also $\lambda^n(1-\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n+1} = 0$ und damit $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$. Ist $A$ nun diagonalisierbar, dann gibt es eine Diagonalmatrix $D$ und eine invertierbare Matrix $T$ mit

$$A = TDT^{-1}.$$

Nach dem oben Bewiesenen hat $D$ nur 1 oder 0 auf der Diagonalen. Folglich ist $D^2 = D$ und damit ist

$$A^2 = TDT^{-1}TDT^{-1} = TD^2T^{-1} = TDT^{-1} = A.$$

Ist auf der anderen Seite $A^2 = A$, dann betrachte man $U_1 = \operatorname{kern} A$ und $U_2 = \operatorname{im} A$. Es gibt aber für $u \in U_1 \cap U_2$ ein $w$ mit $u = Aw$. Dann ist aber $0 = Au = A^2 w = Aw = u$. Mit anderen Worten ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Dies impliziert aber zusammen mit der Rangformel $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{C}^m$.
Es ist aber $U_1 = \operatorname{Eig}(A, 0)$. Wir zeigen nun, dass $U_2 \subset \operatorname{Eig}(A, 1)$. Sei dazu $u \in U_2$ gegeben. Dann gibt es ein $w$ mit $u = Aw$. Dann ist aber $Au = A^2 w = Aw = u$ und damit ist $u \in \operatorname{Eig}(A, 1)$. Wählt man nun eine Basis von $U_1$ und eine Basis von $U_2$, dann bildet die Gesamtheit der Vektoren eine Basis von $\mathbb{C}^m$. Diese bestehen aber aus Eigenvektoren von $A$ zu den Eigenwerten 0 und 1. Damit hat man eine Basis von Eigenvektoren für $A$ gefunden.

**Aufgabe 6** (*Multiple-Choice*) (21)

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe (3 Punkte), wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird Ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.

**Die Antworten sind auf ein gesondertes Antwortblatt für diese Aufgabe einzutragen.**

(a) Es sei $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$\square$ $0 \cdot v = 0$ $\square$ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ $\square$ $\lambda u = 0$ impliziert $u = 0$ oder $\lambda = 0$
$\square$ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ $\square$ $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ $\square$ $V$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$

(b) Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben. Welche Aussagen über den Rang sind richtig?
$\square$ $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} A$ $\square$ $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} B$ $\square$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$ $\square$ $\operatorname{rg} A = n$, dann ist $A$ invertierbar
$\square$ $\operatorname{rg} A = n = m$, dann ist $A$ invertierbar $\square$ $\operatorname{rg} A \leq \min\{n, m\}$

(c) Es sei $V$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Weiter sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $A = A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$, $B = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $C = A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$. Dann gilt:
$\square$ $A, B$ sind ähnlich $\square$ $A, C$ sind ähnlich $\square$ $A, B$ sind äquivalent
$\square$ $\det A = \det B$ $\square$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C$ $\square$ $p_A = p_B$

(d) Es seien $U_1, U_2$ **verschiedene** Untervektorräume der Dimension 3 von $\mathbb{R}^5$. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?
$\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ $\square$ $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum
$\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ $\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 2$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 4$
$\square$ $U_1 \cap U_1$ ist kein Untervektorraum $\square$ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

(e) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:
$\square$ Falls $p_A$ keine mehrfache Nullstelle hat, ist $A$ reell diagonalisierbar.
$\square$ Existiert $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal mit $S^TAS$ diagonal, so ist $A$ reell diagonalisierbar.
$\square$ Existiert $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit $S^{-1}AS$ diagonal, so ist $A$ reell diagonalisierbar.
$\square$ Existiert $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar so, dass $S^{-1}AS$ eine reelle Diagonalmatrix ist, dann ist $A$ reell diagonalisierbar.
$\square$ Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von $A$, so ist $A$ reell diagonalisierbar.
$\square$ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einen komplexen nicht-reellen Eigenwert, so ist $A$ reell diagonalisierbar.

(f) Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum endlicher Dimension $n$ und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf $V$. Weiter sei $f\colon V \to V$ selbstadjungiert. Wir fassen $\mathbb{R}^n$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt auf. Dann gilt:
$\square$ Es gibt eine ONB von $V$ $\square$ Es gibt eine Isometrie $g\colon V \to \mathbb{R}^n$
$\square$ $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|v + u\|^2$ für alle $u, v \in V$ $\square$ $\langle f(v), u\rangle = \langle v, f(u)\rangle$ für alle $u, v \in V$
$\square$ Es ist $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ symmetrisch für jede Basis $\mathcal{A}$ $\square$ Es ist $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ symmetrisch für jede ONB $\mathcal{A}$

(g) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei reelle Matrizen, die orthogonal ähnlich sind. Dann gilt:
$\square$ $A$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn $B$ diagonalisierbar ist. $\square$ $A$ und $B$ sind ähnlich.
$\square$ Es gibt $S \in O(n)$ mit $A = SBS^T$. $\square$ Es gibt $S \in SO(n)$ mit $SBS^T = A$.
$\square$ $A$ ist symmetrisch genau dann wenn $B$ symmetrisch ist. $\square$ Es gibt eine ONB $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F_A) = B$.

*Lösung von Aufgabe 6:*

(a) Es sei $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$\boxtimes$ $0 \cdot v = 0$ $\boxtimes$ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ $\boxtimes$ $\lambda u = 0$ impliziert $u = 0$ oder $\lambda = 0$
$\boxtimes$ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ $\boxtimes$ $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ $\boxtimes$ $V$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$

(b) Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben. Welche Aussagen über den Rang sind richtig?

☒ $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} A$ ☒ $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg} B$ ☒ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$ ☐ $\operatorname{rg} A = n$, dann ist $A$ invertierbar
☒ $\operatorname{rg} A = n = m$, dann ist $A$ invertierbar ☒ $\operatorname{rg} A \leq \min\{n, m\}$

(c) Es sei $V$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Weiter sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $A = A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$, $B = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $C = A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$. Dann gilt:

☒ $A, B$ sind ähnlich ☐ $A, C$ sind ähnlich ☒ $A, B$ sind äquivalent

☒ $\det A = \det B$ ☒ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} C$ ☒ $p_A = p_B$

(d) Es seien $U_1, U_2$ **verschiedene** Untervektorräume der Dimension 3 von $\mathbb{R}^5$. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?

☐ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$ ☐ $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum

☐ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 2$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 4$

☐ $U_1 \cap U_1$ ist kein Untervektorraum ☒ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

(e) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

☐ Falls $p_A$ keine mehrfache Nullstelle hat, ist $A$ reell diagonalisierbar.

☒ Existiert $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal mit $S^T AS$ diagonal, so ist $A$ reell diagonalisierbar.

☒ Existiert $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit $S^{-1}AS$ diagonal, so ist $A$ reell diagonalisierbar.

☒ Existiert $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar so, dass $S^{-1}AS$ eine reelle Diagonalmatrix ist, dann ist $A$ reell diagonalisierbar.

☒ Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von $A$, so ist $A$ reell diagonalisierbar.

☐ Hat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einen komplexen nicht-reellen Eigenwert, so ist $A$ reell diagonalisierbar.

(f) Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum endlicher Dimension $n$ und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm auf $V$. Weiter sei $f\colon V \to V$ selbstadjungiert. Wir fassen $\mathbb{R}^n$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt auf. Dann gilt:

☒ Es gibt eine ONB von $V$ ☒ Es gibt eine Isometrie $g\colon V \to \mathbb{R}^n$

☐ $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|v + u\|^2$ für alle $u, v \in V$ ☒ $\langle f(v), u\rangle = \langle v, f(u)\rangle$ für alle $u, v \in V$

☐ Es ist $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ symmetrisch für jede Basis $\mathcal{A}$ ☒ Es ist $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ symmetrisch für jede ONB $\mathcal{A}$

(g) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei reelle Matrizen, die orthogonal ähnlich sind. Dann gilt:

☒ $A$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn $B$ diagonalisierbar ist. ☒ $A$ und $B$ sind ähnlich.

☒ Es gibt $S \in O(n)$ mit $A = SBS^T$. ☐ Es gibt $S \in SO(n)$ mit $SBS^T = A$.

☒ $A$ ist symmetrisch genau dann wenn $B$ symmetrisch ist. ☒ Es gibt eine ONB $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F_A) = B$.