ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Probeklausur Lineare Algebra 1

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100 Punkte sind 100%.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1 (*Gleichungssysteme*) (15)
Man gebe abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung der $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$ an, welche das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & + & 4x_6 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & \alpha \end{array}$$

lösen.

Lösung von Aufgabe 1: Das Gleichungssystem lässt sich schreiben als $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ und } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

Wir können also den Gauß-Algorithmus benutzen, um dieses Gleichungssystem zu lösen. Zunächst bringen wir $(A|b)$ auf Zeilenstufenform durch elementare Zeilenumformungen:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \alpha \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \alpha \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{(II)} \\ \text{(I)} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \alpha \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \text{(II)}-3\text{(I)} \\ \text{(III)}-2\text{(I)} \\ \\ \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \text{(III)}-\text{(II)} \\ \text{(IV)}-(1) \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\text{(II)} \\ -1/2\text{(III)} \\ \\ \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat also keine Lösung, falls $\alpha \neq 3$ ist. Die Lösungsmenge ist also $\emptyset$. Wir können also nun mit $\alpha = 3$ weiterrechnen. Durch Rückwärtssubtitution bekommen wir die spezielle Lösung

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter erhalten wir durch Rückwärtssubstitution eine Basis von $\text{Lös}(A, 0)$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also eine Parametrisierung von der gewünschten Lösungsmenge $\text{Lös}(A, b)$ über

$$\begin{array}{ll} \emptyset & \text{, falls } \alpha \neq 3 \\ \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} & \text{, falls } \alpha = 3. \end{array}$$

Aufgabe 2 (*Diagonalisierung*) (30)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie welche der Matrizen reell und welche komplex diagonalisierbar sind. Geben Sie zudem für eine der Matrizen A eine explizite Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ an, für welche $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung von Aufgabe 2: Wir geben den Matrizen Namen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hat nur den Eigenwert 3 und ist keine Diagonalmatrix. Deshalb kann A weder reell noch komplex diagonalisierbar sein.
Die Matrix C ist eine reelle und symmetrische Matrix. Deshalb können wir den Spektralsatz anwenden. Dieser besagt, dass eine solche Matrix orthogonal reell diagonalisierbar ist. Insbesondere ist also C reell und komplex diagonalisierbar.
Für die Matrix D berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p_D(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= ((1-\lambda)^2 - 1)((1-\lambda)^2 + 9). \end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit die Eigenwerte von D sind also

$$0, 2, 1+3i, 1-3i.$$

Weil die Matrix nicht-reelle Eigenwerte hat, kann diese nicht reell diagonalisierbar sein. Weiter hat D vier verschiedene Eigenwerte. Deshalb ist D komplex diagonalisierbar.
Für die Matrix B berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom. Dieses ergibt sich zu

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda-1 & 2 & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1) \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda+1) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)((2-\lambda)^2 - 2) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen von p_B zu

$$-1, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}.$$

Die Matrix B hat also 3 verschiedene reelle Eigenwerte. Diese ist also komplex und reell diagonalisierbar.

Wir geben nun eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ an derart, dass $T^{-1}BT$ diagonal ist. Dazu berechnen wir eine Basis von Eigenvektoren für die Eigenräume.
Wir beginnen mit einer Basis für $\mathrm{Eig}(B, -1)$ (wir benutzen den Gauß-Algorithmus):

$$B + E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich also eine Basis des Eigenraums zu (Rückwärtssubstitution)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun suchen wir eine Basis von $\mathrm{Eig}(B, 2+\sqrt{2})$ (wir benutzen den Gauß-Algorithmus):

$$B - (2+\sqrt{2})E_3 = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 1 & -2-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \overset{\text{(MZ)}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -3-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Rückwärtssubstitution bekommen wir die Basis des Eigenraumes

$$\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aus Symmetriegründen ist dann

$$\begin{pmatrix} 1-2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 3-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

eine Basis zum Eigenraum $\mathrm{Eig}(B, 2-\sqrt{2})$. Weil die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 3-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind, sind diese linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathbb{C}^3$ nach dem Basisergänzungssatz. Damit ist die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1+2\sqrt{2} & 1-2\sqrt{2} \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 3+\sqrt{2} & 3-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

invertierbar (weil die Spaltenvektoren eine Basis sind) und (weil die Spalten Eigenvektoren sind) ist

$$T^{-1}BT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

diagonal wie verlangt.

Aufgabe 3 (*Darstellungsmatrizen*) (10+10)

Man betrachte die lineare Abbildung

$$f\colon P_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4,\ f\colon p \mapsto (p(1), p(2), p'(1), p'(2))$$

auf dem Raum der Polynomfunktionen $P_4(\mathbb{R})$ mit Basis $\mathcal{B} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_2, \tilde{e}_0)$, wobei $\tilde{e}_k(x) = x^k$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ gilt, nach $\mathbb{R}^4$ mit der Basis $\mathcal{A} = (e_4, e_3, e_2, e_1)$ bestehend aus Einheitsvektoren. Geben Sie wie üblich jeweils Begründungen für ihre Ergebnisse zu folgenden Aufgaben!

(a) Man berechne die Darstellungsmatrix $A = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f)$.

(b) Für die Matrix A aus Teil (a) und $b = (3, 1, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$ wurde

$$\text{Lös}(A, b) = \Big\{(-1 - 12\alpha, -6\alpha, \alpha, 1 + 13\alpha, 4\alpha) \in \mathbb{R}^5 :\ \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$$

berechnet. Geben Sie eine Parametrisierung der $p \in P_4(\mathbb{R})$ an, die $p(1) = 0$, $p(2) = 2$, $p'(1) = 1$ und $p'(2) = 3$ erfüllen.

Lösung von Aufgabe 3:

ad (a): Es ist $f(\tilde{e}_1) = (1, 2, 1, 1) = e_4 + e_3 + 2e_2 + e_1$ und damit ist die erste Spalte von A gegeben durch $(1, 1, 2, 1)$. Genauso ist wegen $f(\tilde{e}_3) = (1, 8, 3, 12) = 12e_4 + 3e_3 + 8e_2 + e_1$ und damit ist die zweite Spalte von A gegeben durch $(12, 3, 8, 1)$. Wegen $f(\tilde{e}_4) = (1, 16, 4, 32) = 32e_4 + 4e_3 + 16e_2 + e_1$ ist die dritte Spalte von A gegeben durch $(32, 4, 16, 1)$. Die letzten beiden Spalten kann man genauso aus $f(\tilde{e}_2) = (1, 4, 2, 4)$ und $f(\tilde{e}_0) = (1, 1, 0, 0)$ ablesen. Es ergibt sich

$$A = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 32 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 16 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ad (b): Es sei $T\colon \mathbb{R}^5 \to P_4(\mathbb{R})$ die invertierbare lineare Abbildung mit $T(e_1) = \tilde{e}_1$, $T(e_2) = \tilde{e}_3$, $T(e_3) = \tilde{e}_4$, $T(e_4) = \tilde{e}_2$, $T(e_5) = \tilde{e}_0$. Genauso sei $S\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, die durch $S(e_1) = e_4$, $S(e_2) = e_3$, $S(e_3) = e_2$ und $S(e_4) = e_1$ festgelegt ist. Wir suchen eine Parametrisierung der $p \in P_4(\mathbb{R})$ mit $f(p) = (0, 2, 1, 3)$. Nun ist aber wegen

$$\begin{aligned} f(p) = (0, 2, 1, 3) &\Leftrightarrow S^{-1}f(p) = S^{-1}(0, 2, 1, 3) = b \Leftrightarrow A(T^{-1}p) = S^{-1}f(T(T^{-1}p)) = b \\ &\Leftrightarrow T^{-1}p \in \text{Lös}(A, b) \Leftrightarrow p \in T\,\text{Lös}(A, b) \end{aligned}$$

eine Parametrisierung gegeben durch

$$T\,\text{Lös}(A, b) = \Big\{T(-1 - 12\alpha, -6\alpha, \alpha, 1 + 13\alpha, 4\alpha) \in \mathbb{R}^4 :\ \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$$

mit anderen Worten ist

$$\Big\{p \in \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \Big|\ \exists \alpha \in \mathbb{R} :\ p(x) = (-1 - 12\alpha)x - 6\alpha x^3 + \alpha x^4 + (1 + 13\alpha)x^2 + 4\alpha \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\Big\}$$

die gesuchte Parametrisierung.

Aufgabe 4 (*Die Spur einer linearen Abbildung*) (15)
Diese Aufgabe haben Sie bereits auf einem Übungsblatt bearbeitet. Verwenden Sie daher nur das über die Spur, was hier angegeben ist. Wir definieren die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ über

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt. Weiter sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$ und $f\colon V \to V$ linear. Man zeige, dass $\operatorname{Tr} f := \operatorname{Tr} A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ist.

Lösung von Aufgabe 4: Es sei $\mathcal{A}$ eine weitere Basis. Dann gilt wegen der Transformationsformel

$$A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f) = S^{-1} A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) S$$

für ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Dann ist aber

$$\operatorname{Tr} A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f) = \operatorname{Tr}\left(S^{-1} A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) S\right) = \operatorname{Tr}\left(A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) S S^{-1}\right) = \operatorname{Tr}\left(A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) E_n\right) = \operatorname{Tr} A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

und damit $\operatorname{Tr} f := \operatorname{Tr} A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ unabhängig von $\mathcal{B}$ wie verlangt.

Aufgabe 5 (*Bonusaufgabe*) (20)
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

(a) Man zeige $\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}$.
(b) Es sei nun AB diagonalisierbar und $\operatorname{rg} B = m$. Man zeige, dass BA diagonalisierbar ist.

Lösung von Aufgabe 5:
ad (a): Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert mit Eigenvektor x von AB, dann ist $Bx \neq 0$, sonst wäre $\lambda x = ABx = 0$ und damit $\lambda = 0$. Weiter ist $BA(Bx) = B(AB)x = \lambda Bx$. Es ist also Bx ein Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.
Wir haben also $\sigma(AB)\backslash\{0\} \subset \sigma(BA)$ gezeigt. Aus Symmetriegründen folgt dann $\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}$.
ad (b): Es sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von Eigenvektoren zu AB und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Dann ist $Bv_1, ..., Bv_n$ ein Erzeugendensystem, weil F_B wegen $\dim F_B(\mathbb{C}^n) = \operatorname{rg} F_B = \operatorname{rg} B = m$ surjektiv ist und surjektive Abbildungen Erzeugendensysteme auf Erzeugendensysteme abbilden. Mit dem Basisauswahlsatz kann man eine Basis $\mathcal{B}$ aus $Bv_1, ..., Bv_n$ auswählen. Wegen $BA(Bv_i) = B(AB)v_i = \lambda_i Bv_i$ besteht diese Basis $\mathcal{B}$ dann aus Eigenvektoren von BA. Damit ist auch BA diagonalisierbar.

Aufgabe 6 (*Multiple-Choice*) (21)

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe (3 Punkte), wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird Ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.
Die Antworten sind auf ein gesondertes Antwortblatt für diese Aufgabe einzutragen.

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann gilt
☐ $(\mathbb{K}, \cdot)$ ist eine Gruppe ☐ $1+1+1+1 \neq 0$ ☐ $\lambda\mu = 0$ impliziert $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$
☐ $(\mathbb{K}, +)$ ist eine Gruppe ☐ $(\mathbb{K}, -)$ ist eine Gruppe ☐ $\operatorname{char}\mathbb{K}$ ist eine Primzahl

(b) Welche der folgenden Mengen sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation $(n > 1)$?
☐ $O(n)$ ☐ $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^T A = E_n\}$ ☐ $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^T = A\}$
☐ $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ ☐ $\{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} :\ \det A \neq 0\}$ ☐ $\{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} :\ \det A = \pm 1\}$

(c) Es sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 5 und U_1, U_2 zwei Untervektorräume der Dimension 3. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?
☐ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ ☐ U_1 ist nicht endlich erzeugt ☐ $U_1 \cap U_2$ ist kein Untervektorraum
☐ $U_1 + U_2 = V$ ☐ $U_1 \oplus U_2 = V$ ☐ $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum

(d) Es seien A und B ähnlich und C eine weitere Matrix gleicher Größe. Über die Ähnlichkeit lässt sich folgende Aussage treffen:
☐ A, B sind Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung $f\colon V \to V$ ☐ $\det A = \det B$
☐ $p_A = p_B$ ☐ $p_A = p_C$, dann sind A und C ähnlich ☐ $p_A = p_C$ habe keine mehrfache Nullstelle, dann sind A und C ähnlich ☐ A und B sind äquivalent

(e) Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und V endlich erzeugter euklidischer Vektorraum. Welche Aussagen sind richtig?
☐ $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ ist diagonal für eine geeignete Basis $\mathcal{B}$ ☐ f injektiv genau dann, wenn f surjektiv
☐ $f^{-1}(v)$ für $v \in f(V)$ ist ein affiner Unterraum ☐ f surjektiv, wenn $f(v) = 0$ immer $v = 0$ impliziert ☐ $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ ist diagonal mit Einsen und Nullen auf der Diagonalen für geeignete Basen $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ ☐ $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ ist diagonal mit Einsen und Nullen auf der Diagonalen für geeignete ONBs $\mathcal{B}, \mathcal{A}$

(f) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Abbildung mit $f(0) = 0$. Dann gilt:
☐ f ist linear ☐ $f(e_1), ..., f(e_n)$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^n$. ☐ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 2$ ☐ $\|f(v)\| = \|v\|$ für $v \in \mathbb{R}^n$ ☐ f ist bijektiv ☐ f ist injektiv

(g) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unter welchen Voraussetzungen ist A diagonalisierbar?
☐ $A^T = A$ ☐ $A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ☐ A hat n verschiedenen Eigenwerte ☐ A hat n Eigenwerte, wenn man diese mit der algebraischen Vielfachheit zählt. ☐ A hat n Eigenwerte, wenn man diese mit der geometrischen Vielfachheit zählt. ☐ p_A hat keine mehrfache Nullstelle.

Lösung von Aufgabe 6:

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann gilt

☐ $(\mathbb{K}, \cdot)$ ist eine Gruppe ☐ $1+1+1+1 \neq 0$ ☒ $\lambda\mu = 0$ impliziert $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$
☒ $(\mathbb{K}, +)$ ist eine Gruppe ☐ $(\mathbb{K}, -)$ ist eine Gruppe ☒ $\operatorname{char}\mathbb{K}$ ist eine Primzahl

(b) Welche der folgenden Mengen sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation $(n > 1)$?

☒ $O(n)$ ☒ $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^T A = E_n\}$ ☐ $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^T = A\}$
☒ $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ ☐ $\{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} :\ \det A \neq 0\}$ ☒ $\{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} :\ \det A = \pm 1\}$

(c) Es sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 5 und U_1, U_2 zwei Untervektorräume der Dimension 3. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?

☐ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ ☐ U_1 ist nicht endlich erzeugt ☐ $U_1 \cap U_2$ ist kein Untervektorraum

$\boxtimes$ $U_1 + U_2 = V$ $\square$ $U_1 \oplus U_2 = V$ $\boxtimes$ $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum

(d) Es seien A und B ähnlich und C eine weitere Matrix gleicher Größe. Über die Ähnlichkeit lässt sich folgende Aussage treffen:

$\boxtimes$ A, B sind Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung $f\colon V \to V$ $\boxtimes$ $\det A = \det B$ $\boxtimes$ $p_A = p_B$ $\square$ $p_A = p_C$, dann sind A und C ähnlich $\boxtimes$ $p_A = p_C$ habe keine mehrfache Nullstelle, dann sind A und C ähnlich $\boxtimes$ A und B sind äquivalent

(e) Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und V endlich erzeugter euklidischer Vektorraum. Welche Aussagen sind richtig?

$\square$ $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ ist diagonal für eine geeignete Basis $\mathcal{B}$ $\boxtimes$ f injektiv genau dann, wenn f surjektiv $\boxtimes$ $f^{-1}(v)$ für $v \in f(V)$ ist ein affiner Unterraum $\boxtimes$ f surjektiv, wenn $f(v) = 0$ immer $v = 0$ impliziert $\boxtimes$ $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ ist diagonal mit Einsen und Nullen auf der Diagonalen für geeignete Basen $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ $\square$ $A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ ist diagonal mit Einsen und Nullen auf der Diagonalen für geeignete ONBs $\mathcal{B}, \mathcal{A}$

(f) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Abbildung mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

$\boxtimes$ f ist linear $\boxtimes$ $f(e_1), ..., f(e_n)$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^n$. $\boxtimes$ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 2$ $\boxtimes$ $\|f(v)\| = \|v\|$ für $v \in \mathbb{R}^n$ $\boxtimes$ f ist bijektiv $\boxtimes$ f ist injektiv

(g) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unter welchen Voraussetzungen ist A diagonalisierbar?

$\square$ $A^T = A$ $\boxtimes$ $A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\boxtimes$ A hat n verschiedenen Eigenwerte $\square$ A hat n Eigenwerte, wenn man diese mit der algebraischen Vielfachheit zählt. $\boxtimes$ A hat n Eigenwerte, wenn man diese mit der geometrischen Vielfachheit zählt. $\boxtimes$ p_A hat keine mehrfache Nullstelle.