ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Probeklausur Lineare Algebra 1

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100 Punkte sind 100%.

Aufgabe 1 (*Gleichungssysteme*) (15)

Man gebe abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung der $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$ an, welche das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & + & 4x_6 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & \alpha \end{array}$$

lösen.

Aufgabe 2 (*Diagonalisierung*) (30)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entscheiden Sie welche der Matrizen reell und welche komplex diagonalisierbar sind. Geben Sie zudem für eine der Matrizen A eine explizite Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ an, für welche $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3 (*Darstellungsmatrizen*) (10+10)

Man betrachte die lineare Abbildung

$$f \colon P_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4, \; f \colon p \mapsto (p(1), p(2), p'(1), p'(2))$$

auf dem Raum der Polynomfunktionen $P_4(\mathbb{R})$ mit Basis $\mathcal{B} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_2, \tilde{e}_0)$, wobei $\tilde{e}_k(x) = x^k$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ gilt, nach $\mathbb{R}^4$ mit der Basis $\mathcal{A} = (e_4, e_3, e_2, e_1)$ bestehend aus Einheitsvektoren. Geben Sie wie üblich jeweils Begründungen für ihre Ergebnisse zu folgenden Aufgaben!

(a) Man berechne die Darstellungsmatrix $A = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f)$.

(b) Für die Matrix A aus Teil (a) und $b = (3, 1, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$ wurde

$$\text{Lös}(A, b) = \Big\{ (-1 - 12\alpha, -6\alpha, \alpha, 1 + 13\alpha, 4\alpha) \in \mathbb{R}^5 : \; \alpha \in \mathbb{R} \Big\}$$

berechnet. Geben Sie eine Parametrisierung der $p \in P_4(\mathbb{R})$ an, die $p(1) = 0$, $p(2) = 2$, $p'(1) = 1$ und $p'(2) = 3$ erfüllen.

Aufgabe 4 (*Die Spur einer linearen Abbildung*) (15)

Diese Aufgabe haben Sie bereits auf einem Übungsblatt bearbeitet. Verwenden Sie daher nur das über die Spur, was hier angegeben ist. Wir definieren die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ über

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt. Weiter sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$ und $f \colon V \to V$ linear. Man zeige, dass $\mathrm{Tr}\, f := \mathrm{Tr}\, A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (*Bonusaufgabe*) (20)
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

(a) Man zeige $\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}$.
(b) Es sei nun AB diagonalisierbar und $\operatorname{rg} B = m$. Man zeige, dass BA diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6 (*Multiple-Choice*) (21)
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe (3 Punkte), wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird Ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.
Für die Antworten steht Ihnen ein gesondertes Blatt zur Verfügung.

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann gilt
☐ $(\mathbb{K}, \cdot)$ ist eine Gruppe ☐ $1+1+1+1 \neq 0$ ☐ $\lambda\mu = 0$ impliziert $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$
☐ $(\mathbb{K}, +)$ ist eine Gruppe ☐ $(\mathbb{K}, -)$ ist eine Gruppe ☐ $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ist eine Primzahl

(b) Welche der folgenden Mengen sind Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation ($n > 1$)?
☐ $O(n)$ ☐ $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^T A = E_n\}$ ☐ $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^T = A\}$
☐ $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ ☐ $\{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} :\ \det A \neq 0\}$ ☐ $\{A \in \mathbb{Z}^{n\times n} :\ \det A = \pm 1\}$

(c) Es sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 5 und U_1, U_2 zwei Untervektorräume der Dimension 3. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?
☐ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ ☐ U_1 ist nicht endlich erzeugt ☐ $U_1 \cap U_2$ ist kein Untervektorraum
☐ $U_1 + U_2 = V$ ☐ $U_1 \oplus U_2 = V$ ☐ $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum

(d) Es seien A und B ähnlich und C eine weitere Matrix gleicher Größe. Über die Ähnlichkeit lässt sich folgende Aussage treffen:
☐ A, B sind Darstellungsmatrizen derselben linearen Abbildung $f\colon V \to V$ ☐ $\det A = \det B$
☐ $p_A = p_B$ ☐ $p_A = p_C$, dann sind A und C ähnlich ☐ $p_A = p_C$ habe keine mehrfache Nullstelle, dann sind A und C ähnlich ☐ A und B sind äquivalent

(e) Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und V endlich erzeugter euklidischer Vektorraum. Welche Aussagen sind richtig?
☐ $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ist diagonal für eine geeignete Basis $\mathcal{B}$ ☐ f injektiv genau dann, wenn f surjektiv
☐ $f^{-1}(v)$ für $v \in f(V)$ ist ein affiner Unterraum ☐ f surjektiv, wenn $f(v) = 0$ immer $v = 0$ impliziert ☐ $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ ist diagonal mit Einsen und Nullen auf der Diagonalen für geeignete Basen $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ ☐ $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ ist diagonal mit Einsen und Nullen auf der Diagonalen für geeignete ONBs $\mathcal{B}, \mathcal{A}$

(f) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine isometrische Abbildung mit $f(0) = 0$. Dann gilt:
☐ f ist linear ☐ $f(e_1), ..., f(e_n)$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^n$. ☐ f ist eine Spiegelung oder Drehung falls $n = 2$ ☐ $\|f(v)\| = \|v\|$ für $v \in \mathbb{R}^n$ ☐ f ist bijektiv ☐ f ist injektiv

(g) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unter welchen Voraussetzungen ist A diagonalisierbar?
☐ $A^T = A$ ☐ $A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ☐ A hat n verschiedenen Eigenwerte ☐ A hat n Eigenwerte, wenn man diese mit der algebraischen Vielfachheit zählt. ☐ A hat n Eigenwerte, wenn man diese mit der geometrischen Vielfachheit zählt. ☐ p_A hat keine mehrfache Nullstelle.

Viel Erfolg! (Σ 121)