ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2015/2016

Zwischentest Lineare Algebra 1

Achten Sie auf vollständige, saubere und schlüssige Argumentation! 100 Punkte sind 100%.

Aufgabe 1 (*Dimension und Basis bestimmen*) (15)

Man betrachte die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}^4$:

$$U = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+i \\ 2+i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} i-1 \\ i \\ i \\ i \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}$$

Man bestimme eine Basis und die Dimension von U als $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$.

Aufgabe 2 (*Gleichungssysteme*) (20)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Man bestimme die Lösung der Gleichung $AX = B$ für $X \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ (*Hinweis:* $\operatorname{rg} A = 3$).
(b) Man finde eine Parametrisierung der Lösungsmenge von $Bx = b$ für $x \in \mathbb{R}^5$.
(c) Handelt es sich bei $\text{Lös}(C, b)$ um eine Ebene (mit Begründung!)?

Aufgabe 3 (*Darstellungsmatrizen*) (15)

Man betrachte eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$ zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen von Polynomfunktionen $V = P_3(\mathbb{R}) = \langle\langle e_3, e_2, e_1, e_0 \rangle\rangle$ und $W = P_5(\mathbb{R}) = \langle\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_0 \rangle\rangle$ definiert über

$$F(p)\colon x \mapsto x^2 p(x) + p(-1)x^5 + p(2) + p(-2).$$

Man berechne die Darstellungsmatrix $A(F)$ bezüglich der Basen (mit angegebener Reihenfolge der Vektoren!). Dabei gilt $e_k(x) = x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k = 0, ..., 5$.

Aufgabe 4 (*Die Heisenberggruppe*) (10)

Man zeige, dass die folgende Menge zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 5 (*Produkt von Vektorräumen*) (10)

Es sei $V = \langle\langle v_1, ..., v_n \rangle\rangle$ und $W = \langle\langle w_1, ..., w_m \rangle\rangle$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Die Menge $V \times W$ mit $(v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v + \tilde{v}, w + \tilde{w})$ und $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$ für $(v, w), (\tilde{v}, \tilde{w}) \in V \times W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (dies müssen Sie nicht zeigen).

(a) Man zeige, dass $(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m) \in V \times W$ eine Basis von $V \times W$ ist.
(b) Man bestimme $\dim(V \times W)$ (mit Begründung!).

Bitte wenden!

Aufgabe 6 (*Gleichzeitige Basisauswahl und Basisergänzung*) (10)
Es sei $V = \langle v_1, ..., v_n\rangle$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, ..., v_m$ $(m \leq n)$ sei linear unabhängig. Man zeige, dass es eine Basis $B \subset V$ gibt mit

$$\{v_1, ..., v_m\} \subset B \subset \{v_1, ..., v_n\}.$$

Aufgabe 7 (*Annullierende Polynome*) (20)
Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gegeben. Wir setzen

$$p(A) := \sum_{k=0}^{m} a_k A^k,$$

für ein Polynom $p = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}_m[X]$.

(a) Man zeige, dass es ein Polynom $p \in \mathbb{K}_{n^2}[X]\backslash\{0\}$ mit $p(A) = 0$ gibt.
(b) Es sei $p \in \mathbb{K}_m[X]$ mit $p(0) \neq 0$ und $p(A) = 0$. Man zeige, dass A invertierbar ist.

Aufgabe 8 (*Multiple-Choice*) (21)
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben. Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein. Markieren Sie mit einem Kreuz alle richtigen Aussagen. Sie erhalten die volle Punktzahl der Teilaufgabe (3 Punkte), wenn Sie genau die richtigen Aussagen markiert haben. Je falsch gesetzem oder fehlendem Kreuz wird Ihnen ein Punkt von der Maximalpunktzahl der Teilaufgabe abgezogen. Die Punktzahl einer Teilaufgabe wird auf Null aufgerundet, sollte diese negativ sein. Die erreichte Punktzahl der Aufgabe entspricht der Summe der Punkte der Teilaufgaben.
Für die Antworten steht Ihnen ein gesondertes Blatt zur Verfügung.

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, dann gilt
☐ $(\mathbb{K}, \cdot)$ ist eine Gruppe ☐ $1 + 1 + 1 + 1 \neq 0$ ☐ $\lambda\mu = 0$ impliziert $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$
☐ $(\mathbb{K}, +)$ ist eine Gruppe ☐ $(\mathbb{K}, -)$ ist eine Gruppe ☐ $\operatorname{char}\mathbb{K}$ ist eine Primzahl
(b) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v, u \in V$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann gilt
☐ $1 \cdot v = v$ ☐ $v + v = 0$ impliziert $v = 0$ ☐ $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
☐ $u + v = v$ impliziert $u = 0$ ☐ $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ ☐ V ist endlich erzeugt
(c) Wir betrachten $\Phi\colon \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ definiert über $\Phi(A) = F_A$ mit $F_A\colon x \mapsto Ax$ wie in der Vorlesung. Sei nun $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times k}$ und $C \in \mathrm{GL}(n)$. Dann gilt
☐ Φ ist ein Isomorphismus ☐ F_A injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$ ☐ F_A injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
☐ $F_{AB} = F_A \circ F_B$ ☐ $F_{C^{-1}} = (F_C)^{-1}$ ☐ Φ ist linear
(d) Es sei $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{K}^{n\times k}$. Dann gilt
☐ $(A + B)^T = A^T + B^T$ ☐ $(AC)^T = A^T C^T$ ☐ $F_{A^T} = F_A^{-1}$
☐ $\operatorname{rg} A^T = \operatorname{rg} A$ ☐ $(A^T)^T = A$ ☐ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} F_A$
(e) Es seien U_1, U_2 **verschiedene** Untervektorräume der Dimension 3 von $\mathbb{R}^7$. Was ist unter den Voraussetzungen möglich?
☐ $\dim(U_1 + U_2) = 6$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 7$ ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 6$
☐ $\dim(U_1 + U_2) = 5$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$ ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 4$ ☐ $\dim(U_1 + U_2) = 3$
(f) Es gibt injektive Abbildungen der folgenden Gestalt:
☐ $f\colon \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ ☐ $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ ☐ $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
☐ $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ☐ $f\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ☐ $f\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$
(g) Es seien V, W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear. Gehen Sie ab der zweiten Aussage davon aus, dass es eine Basis $\mathcal{A}$ von V und eine Basis $\mathcal{B}$ von W gibt mit

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

☐ Man findet stets $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wie oben. ☐ $r = \operatorname{rg} f$ ☐ $f = \mathrm{id}_V \Leftrightarrow \dim V = r$ und $V = W$
☐ f injektiv $\Leftrightarrow \dim V = r$ ☐ f bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$ ☐ f surjektiv $\Leftrightarrow \dim W = r$

Viel Erfolg! (Σ 121)