ulm university universität ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 10

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **20.1.2017** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*$L^{p,\infty}$ sind Quasi-Banachräume*) (10)
Es sei X ein Banachraum und $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie, dass $L^{p,\infty}(\Omega, X)$ mit der gewöhnlichen Quasi-Norm ein Quasi-Banachraum ist.

Aufgabe 2 (*Interpolation und p-Multiplikatorbereich*) (10)
Es sei $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Man zeige, dass

$$\{p \in [1, \infty) : \; m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)\}$$

eine nicht-triviales offenes oder abgeschlossenes (in der relativen Topologie) Intervall in $[1, \infty)$ ist und die Endpunkte a, b dieses Intervalls $a^{-1} + b^{-1} = 1$ erfüllen.

Aufgabe 3 (*$L^{1,\infty}$ ist nicht isomorph zu einem Banachraum*) (10)
Zeigen Sie, dass es auf $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ keine Norm geben kann, die äquivalent zur kanonischen Quasi-Norm ist.
Bemerkung: Dies ist für $L^{1,p}(\mathbb{R})$ und $p > 1$ nicht mehr der Fall (siehe Zusatzaufgabe 6).

Aufgabe 4 (*Ein neues Resultat zur automatischen vektorwertigen Erweiterung*) (10)
Man benutze Zusatzaufgabe 8 auf diesem Blatt, um zu beweisen, dass es für jeden beschränkten Operator $T\colon L^p(\Omega_1) \to L^p(\Omega_2)$ und jedes q zwischen zwei und p genau ein beschränkter Operator

$$S\colon L^p(\Omega_1, L^q(\Omega_3)) \to L^p(\Omega_2, L^q(\Omega_3))$$

existiert mit $S(f \cdot g) = T(f)g$ für alle $f \in L^p(\Omega_1)$ und $g \in L^q(\Omega_3)$.

Aufgabe 5 (*Eine Anwendung des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz*) (10*)
Es sei μ_p ein Maß auf $\mathbb{R}^d$, welches absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes λ ist und Dichte $|x|^{dp-2d}$ hat. Man zeige, dass für alle $p \in (1, 2]$ eine Konstante C_p existiert mit

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \mu_p)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)}$$

für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 6 (*$L^{p,\infty}$ ist isomorph zu einem Banachraum für $p > 1$*) (10*)
Es sei $p \in (1, \infty)$, X ein Banachraum und (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Man zeige, dass auf $L^{p,\infty}(\Omega, X)$

$$\|f\|^* := \sup_{A \in \Sigma,\ \mu(A) < \infty} \mu(A)^{\frac{1}{p} - 1} \int_A \|f\|_X$$

eine zur kanonischen Quasi-Norm äquivalente Norm definiert.
Bemerkung: Nach Aufgabe 3 ist dies derartiges für $p = 1$ nicht möglich.

Zusatzaufgabe 7 (*Fouriertyp und absolute Konvergenz der Fourierreihe*) (10*)
Wir sagen, dass ein Banachraum X Fouriertyp $p \in [1, 2]$, falls $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$ automatisch $\hat{f} \in \ell^q(\mathbb{Z}, X)$ impliziert, wobei wie üblich $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gelte. Man zeige, dass, falls X Fouriertyp $p > 1$ hat, für jedes $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$ die Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

absolut konvergiert.
Bemerkung: H. König hat gezeigt, dass auch die Rückrichtung gilt. Siehe dazu auch die Bemerkung in Kapitel 5 im Skript (Woche 4).

Zusatzaufgabe 8 (*Eine Verallgemeinerung des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin*) (10*)
Es sei $\theta \in [0, 1]$ und $T\colon L^{p_0}_{L^{r_0}(\Omega_2)}(\Omega_1) \cap L^{p_1}_{L^{r_1}(\Omega_2)}(\Omega_1) \to M(\Omega_3 \times \Omega_4)$ ein linearer Operator mit

$$\|Tf\|_{L^{q_0}_{L^{s_0}(\Omega_4)}(\Omega_3)} \le C_0 \|f\|_{L^{p_0}_{L^{r_0}(\Omega_2)}(\Omega_1)}$$

$$\|Tf\|_{L^{q_1}_{L^{s_1}(\Omega_4)}(\Omega_3)} \le C_1 \|f\|_{L^{p_1}_{L^{r_1}(\Omega_2)}(\Omega_1)}.$$

Dann gilt auch

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}_{L^{s_\theta}(\Omega_4)}(\Omega_3)} \le C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}_{L^{r_\theta}(\Omega_2)}(\Omega_1)}.$$

für $p_\theta^{-1} = (1-\theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}$, $q_\theta^{-1} = (1-\theta)q_0^{-1} + \theta q_1^{-1}$, $r_\theta^{-1} = (1-\theta)r_0^{-1} + \theta r_1^{-1}$ und $s_\theta^{-1} = (1-\theta)s_0^{-1} + \theta s_1^{-1}$ wie üblich.
Bemerkung: Es sei bemerkt, dass sowohl der Interpolationssatz von Riesz-Thorin wie auch der Interpolationssatz von Marcinkiewicz jeweils Spezialfälle einer allgemeineren Interpolationstheorie sind. Dieses Resultat ist ein weiterer Einblick in diese allgemeinere Theorie.