ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 11

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **27.1.2017** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Sind die einfachen Funktionen dicht in schwach-L^p?*) (10)
Zeigen oder widerlegen Sie, dass die einfachen Funktionen mit Träger von endlichem Maß dicht in $L^{p,\infty}(\mathbb{R})$ sind. Was ist mit den Funktionen aus $L^p(\mathbb{R})$? Sind diese dicht in $L^{p,\infty}(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2 (*Hausdorff-Young Ungleichung*) (10)

(a) Man zeige, dass $\mathcal{F}_p$ aus Korollar (18.4) im Skript nichts anderes als $\mathcal{F}\colon S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$ eingeschränkt auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist.

(b) Es sei $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ derart, dass $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt. Man zeige für $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$

$$\left\| \left(\hat{f}(n) \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^p_{2\pi}(\mathbb{R})}.$$

Aufgabe 3 (*Maximalfunktion zu Würfeln*) (10)
Es sei $\mathcal{W}$ die Menge der Würfel in $\mathbb{R}^d$. Man zeige, dass der Operator $M_{\mathcal{W}}$ definiert über

$$\left(M_{\mathcal{W}} f\right)(x) = \sup_{x\in W\in\mathcal{W}} \fint_W |f(y)| \,\mathrm{d}y$$

eine schwache $(1,1)$ Abschätzung und eine starke (p,p) Abschätzung für $p > 1$ erfüllt. Man folgere, dass für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{\mathrm{diam}(W)\to 0\\ x\in W\in\mathcal{W}}} \fint_W f(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$$

gilt.

Aufgabe 4 (*Maximalfunktion zu achsenparallelen zentrierten Rechtecken*) (10)
Es sei $\mathcal{R}$ die Menge der achsenparallelen Rechtecke in $\mathbb{R}^d$ mit Mittelpunkt 0. Wir definieren $M_{\mathcal{R}}$ über

$$\left(M_{\mathcal{R}} f\right)(x) = \sup_{R\in\mathcal{R}} \fint_{x+R} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Man zeige

(a) $M_{\mathcal{R}}$ erfüllt eine starke (p,p) Abschätzung für $p > 1$.

(b) $M_{\mathcal{R}}$ erfüllt keine schwache $(1,1)$ Abschätzung, falls $d > 1$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5 (*Einfache Aussagen über den Fouriertyp*) (10*)
Es sei $p \in [1,2]$ und $q \in [2,\infty]$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Wir sagen X hat Fouriertyp p, falls $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$ stets $\hat{f} \in \ell^q(\mathbb{Z}, X)$ impliziert (siehe Blatt 10 Zusatzaufgabe 7). Man zeige folgende Aussagen:

(a) Ein Banachraum hat stets Fouriertyp 1.
(b) Man zeige, dass ℓ^∞ nicht Fouriertyp p hat für irgendein $p > 1$.
(c) Wenn ein Banachraum Fouriertyp p hat, dann hat er auch Fouriertyp q für $q \in [1,p]$.
(d) Ein Hilbertraum hat jeden Fouriertyp $p \in [1,2]$
(e) Man zeige, dass $L^p(\Omega)$ Fouriertyp $\min\{p,q\}$ hat, wobei $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Zusatzaufgabe 6 (*Äquivalente Definition des Fouriertyps*) (10*)
Es sei X ein Banachraum, $p \in [1,2]$ und q derart, dass $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) X hat Fouriertyp p (siehe die vorige Zusatzaufgabe 5 oder Zusatzaufgabe 7 auf Blatt 10)
(b) $f \in L^p_X(\mathbb{R})$ impliziert $\mathcal{F}f \in L^q_X(\mathbb{R})$

Zusatzaufgabe 7 (*Differentiationssatz für zentrierte achsenparallele Rechtecke gilt*) (10*)
Es sei $\mathcal{R}$ die Menge der achsenparallelen Rechtecke in $\mathbb{R}^d$ mit Mittelpunkt 0. Es sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ für $p > 1$. Man zeige, dass

$$f(x) = \lim_{\substack{\operatorname{diam} R \to 0 \\ R \in \mathcal{R}}} \fint_{x+R} f(y)\,\mathrm{d}y$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Zusatzaufgabe 8 (*Differentiationssatz für zentrierte achsenparallele Rechtecke gilt nicht*) (10*)
Es sei $\mathcal{R}$ die Menge der achsenparallelen Rechtecke in $\mathbb{R}^d$ mit Mittelpunkt 0 und $d > 1$. Man konstruiere eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\limsup_{\substack{\operatorname{diam} R \to 0 \\ R \in \mathcal{R}}} \fint_{x+R} f(y)\,\mathrm{d}y = \infty$$

für x aus einer Menge mit positivem Maß gilt.
Bemerkung: Unter gewissen schwachen Voraussetzungen sind schwache Abschätzungen von Maximaloperatoren für gewisse Mengensysteme tatsächlich äquivalent zur Gültigkeit des Differentiationstheorems für diese Mengensysteme.