ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 12

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **3.2.2017** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Konvergenz eines Fouriermultiplikators*) (10)
Es sei $m_r = \mathbb{1}_{[-r,r]^d}$ gegeben und $p \in (1, \infty)$. Man zeige, dass m_r ein $L^p(\mathbb{R}^d)$-Fouriermultiplikator ist. Es sei $M_r : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ der zugehörige Operator. Man zeige weiter, dass für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ die Funktion $M_r f$ gegen f in $L^p(\mathbb{R}^d)$ konvergiert für $r \to \infty$.

Aufgabe 2 (*Der Maximaloperator als linearer Operator*) (10)
Man zeige, dass

$$T : L^p(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto \left(⨍_{B(\cdot,r)} f(y)\,\mathrm{d}y \right)_{r>0} \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d, \ell^\infty(0,\infty))$$

linear und beschränkt ist. Was hat das mit dem Hardy-Littlewood Maximaloperator zu tun?

Aufgabe 3 (*Erneute Betrachtung der Lösung der Wärmeleitungsgleichung*) (10)
Es sei $p \in [1, \infty)$. Man zeige, dass es für jedes $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d, X)$ eine glatte Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gibt mit $u(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^d, X)$ für alle $t > 0$, $u(t, \cdot) \to u_0$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ und punktweise fast überall für $t \to 0+$ sowie

$$u_t = \Delta u$$

auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 4 (*Funktionen von beschränkter Variation sind Fouriermultiplikatoren*) (10)
Es sei $m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ beschränkt und messbar. Weiter sei m' (als distributionelle Ableitung) ein komplexes Maß. Man zeige, dass $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ist für alle $p \in (1, \infty)$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5 (*1. HDI für absolut stetige Funktionen*) (10*)
Es sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass eine lokal integrierbare Funktion f exisitert mit

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass F stetig und fast überall differenzierbar ist und, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Zusatzaufgabe 6 (*2. HDI für Funktionen von beschränkter Variation*) (10*)
Es sei $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit $f' \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (d.h. die distributionelle Ableitung von f ist ein komplexes Maß auf jedem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$). Man zeige, dass es ein c gibt derart, dass

$$f(x) = c + \int_0^x \mathrm{d}f'$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (d.h. der 2. HDI gilt).

Zusatzaufgabe 7 (*Hilberttransformation auf dem Torus*) (10*)
Es sei $p \in (1,\infty)$. Wir haben bereits mittels Zusatzaufgaben gezeigt, dass $(-i\,\mathrm{sgn}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ein $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$-Fouriermultiplikator ist. Leiten Sie diese Aussage nochmal aus der Tatsache ab, dass $-i\,\mathrm{sgn} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ist, indem Sie wie in Zusatzaufgabe 6 aus Blatt 11 vorgehen.

Zusatzaufgabe 8 (*Quadratfunktionen-Abschätzung für gewisse Fouriermultiplikatoren*) (10*)
Abschätzungen von Quadratfunktionen spielen in der harmonischen Analyse und der Stochstik eine wesentliche Rolle. Wir wollen hier eine wichtige solche Abschätzung zeigen. Es sei $\mathcal{I}$ die Menge der Intervalle in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$(f_I)_{I\in\mathcal{I}} \mapsto (\overline{\mathcal{F}}(\mathbb{1}_I) * f_I)_{I\in\mathcal{I}}$$

einen beschränkten linearen Operator $L^p(\mathbb{R}, \ell^2(\mathcal{I})) \to L^p(\mathbb{R}, \ell^2(\mathcal{I}))$ definiert für alle $p \in (1,\infty)$.