Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 13

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **10.2.2017** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Hörmanderbedingung aus Gradientenabschätzung*) (10)
Es sei $K\colon \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Weiter gebe es eine Konstante $A < \infty$ mit

$$|\nabla K(x)| \leq A|x|^{-1-d}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass K die Hörmanderbedingung erfüllt.

Aufgabe 2 (*Faltungsoperatoren sind für Calderon-Zygmund-Extrapolation geeignet*) (10)
Es sei $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^d)$, $T\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ der zu m gehörige beschränkte Operator. Weiter sei $u = \overline{\mathcal{F}}m$ derart, dass für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)K(y)\,\mathrm{d}y$$

für eine lokal integrierbare Funktion $K\colon \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^d$ gilt. Man zeige, dass dann für alle dyadischen Würfel Q, für alle $f \in \mathcal{D}(Q)$ und fast alle $x \in \overline{Q}^c$

$$(Tf)(x) = \int_Q K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

gilt.

Aufgabe 3 (*Die Riesz-Transformation mit Calderon-Zygmund-Extrapolation*) (20)
Es sei $m(x) = x_i|x|^{-1}$ ($i = 1, ..., d$ beliebig aber fest). Zeigen Sie $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ für alle $p \in (1,\infty)$ gilt, indem Sie die Calderon-Zygmund Extrapolation benutzen.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 4 (*Multiplikatoren auf die man Calderon-Zygmund nicht anwenden kann*)(10*)
Man zeige, dass $\mathbb{1}_{(a,\infty)} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $p \in (1,\infty)$ gilt. Man zeige, dass für $u = \overline{\mathcal{F}}m$ und alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) K(y) \, \mathrm{d}y$$

für eine lokal integrierbare Funktion $K \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ gilt. Für welche $a \in \mathbb{R}$ erfüllt K die Hörmanderbedingung?

Zusatzaufgabe 5 (*Kern für die Riesz-Transformation - Symmetrieargumentation*) (20*)
Es sei $m(x) = x_i|x|^{-1}$ ($i = 1, ..., d$ beliebig aber fest). Wir wollen zeigen, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\overline{\mathcal{F}}m = c \cdot \mathrm{p.\,v.}\, \frac{x_i}{|x|^{1+d}}.$$

(a) Definieren Sie $\mathrm{p.\,v.}\, \frac{x_i}{|x|^{1+d}}$ als temperierte Distribution und zeigen Sie, dass es sich um eine solche handelt.
(b) Zeigen Sie die Behauptung für $d = 1$. Im Folgenden sei nun $d > 1$.
(c) Zeigen Sie, dass $\tilde{m} = |x|^{-1}$ eine temperierte Distribution ist. Wir setzen für das folgende $\tilde{K} = \overline{\mathcal{F}}\tilde{m}$.
(d) Zeigen Sie, dass $\tilde{K}$ rotationssymmetrisch und $(1-d)$-homogen ist.
(e) Es sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gerade mit $\int_{(0,\infty)} \psi = 0$. Man zeige, dass

$$\phi(x) = |x|^{-1} \int_{-\infty}^{|x|} \psi(y) \, \mathrm{d}y$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ liegt und

$$\Psi(x) = \psi(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r\phi(r|x|) \Big|_{r=1}$$

in der Topologie von $S(\mathbb{R}^d)$ gilt.
(f) Man zeige, dass $\langle \tilde{K}, \Psi \rangle = 0$ für Ψ wie aus der vorigen Teilaufgabe gilt.
(g) Man zeige, dass $\langle \tilde{K}, \phi \rangle$ nur von

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)|x|^{1-d} \, \mathrm{d}x$$

abhängt für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
(h) Man folgere die Behauptung auch im Fall $d > 1$.

Zusatzaufgabe 6 (*Elliptische Maximale Regularität - ein Beispiel*) (10*)
Es sei $p \in (1,\infty)$. Man zeige, dass es eine Konstante $C_p > 0$ gibt mit

$$\|f\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C_p \|f - \Delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $f \in S'(\mathbb{R}^d)$ mit $f - \Delta f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (Dabei sei auch die Behauptung eingeschlossen, dass dann bereits $f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$ ist).