Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 14

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **17.2.2017** um spätestens **10ct**.

Es handelt sich um ein Wiederholungs- und Zusammenfassungsblatt. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit. Die zusätzlichen Übungsaufgaben sollen den Stoff vertiefen, abrunden oder wiederholen. Es wird keine geTeXte Lösung geben.

Wiederholungsaufgabe 1 (*Bochnerräume und vektorwertige Integrale*) (5*)
Dieser Teil umfasst die Definition der **vektorwertigen L^p-Räume** und damit die Definition des **Bochnerintegrals** und die Definition der messbaren vektorwertigen Funktionen. Insbesondere sei auf den **Satz von Pettis** hingewiesen. Neben den klassischen Sätzen, die meist auch vektorwertig gelten, sei auch Proposition (2.7) hingewiesen, die wir oft (stillschweigend) benutzt haben.
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 1 (§1-§3)
Übungsaufgaben: Blatt 1 (Aufgabe 1-5), Blatt 2 (Aufgabe 1, 2 und 5)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 1 (Zusatzaufgabe 7 und 8),
Neue Übungsaufgaben:

(a) Man finde einen isometrischen Isomorphismus $L^p(\Omega_1, L^p(\Omega_2, X)) \simeq L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$.
(b) Ist eine Funktion $f\colon [0,1] \to \ell^p$ genau dann messbar, wenn jede der Koordinatenfunktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{K}$ (d.h. $f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$) Lebesgue-messbar ist? Diskutieren Sie dies je nach Wert von $p \in [1,\infty]$.

Wiederholungsaufgabe 2 (*Youngsche Ungleichung, Regularisierung und Konvergenz von Faltungsoperatoren vom Youngschen Typ*) (5*)
Ein wichtiger Teil der Vorlesung ist die Abgrenzung zum *trivialen* Fall, welcher die **Youngsche Ungleichung** darstellt. Ziel der Vorlesung war es ja gerade Faltungsoperatoren mit Kernen zu finden, die nicht integriertbar (oder allgemeiner kein Maß) sind (und damit zu den L^1-Multiplikatoren gehören). Faltungen benutzt man auch oft zur **Regularisierung** (selbst von Distributionen!). Zusammen mit den **Abschneidetechniken** kann man so etwa Dichtheit von den Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ in verschiedenen Räumen beweisen.
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 1 (§3), Kapitel 3 (§9 und §13)
Übungsaufgaben: Blatt 2 (Aufgabe 3 und Zusatzaufgabe 8)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 6 (Zusatzaufgabe 5 und 6)
Neue Übungsaufgaben:

(a) Es sei $p \in [1,\infty]$. Man zeige, dass $f - \Delta f = g$ für $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ genau eine Lösung $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ hat.
(b) Es sei $\phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Folgt aus $\phi_n \to \delta_0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ bereits $\phi_n * f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$? Was ist, wenn man zusätzlich fordert, dass $\|\phi_n\|_{L^1} = 1$ für alle n gilt?

Wiederholungsaufgabe 3 (*Fourierreihen und erstes Konvergenzverhalten*) (5*)
In diesem Teil der Vorlesung wurde die Fourierreihe definiert und deren Konvergenz untersucht. Dazu hat man hier die Eigenschaften der Kerne (**Dirichlet-Kern** und **Fejér-Kern**) untersucht. Die Untersuchung des Fejér-Kerns ergab Konvergenz der Fourierreihe in allen $L^p_{2\pi}$-Räumen im Mittel (woraus auch die Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten folgt). Mit **Chernoffs Trick** leiten sich damit Resultate (wie das Dini-Kriterium) zur Konvergenz der Fourierreihe selber ab (wichtig zu wissen ist auch, was hier nicht gilt). Über den vektorwertigkeit der Resultate kann man hier auch die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe unter geeigneten Bedingungen ableiten. Die absolute Konvergenz - aus der man auch die gleichmäßige Konvergenz folgern kann - kann man hilbertraumwertig mit dem Satz von Plancherel untersuchen. Allgemeiner hängt dies mit dem Fouriertyp zusammen wie wir auch später in der Übung genauer untersucht haben. Einen anderen Zugang zur gleichmäßigen Konvergenz ist **Hardys tauberscher Satz**. Weitere Konvergenzresultate (für beschränkte Halbvariation, Carleson) wurden erwähnt und gehören zur mathematischen Allgemeinbildung. Neben den Konvergenzresultaten ist auch das **Riemann-Lebesgue Lemma** und der **Satz von Plancherel** als elementare Abbildungsverhalten zu nennen.
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 2 (§4-§7)
Übungsaufgaben: Blatt 3 (Aufgabe 1-3 und Zusatzaufgabe 8), Blatt 4 (Aufgabe 1 und 3), Blatt 5 (Aufgabe 1)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 3 (Zusatzaufgabe 5), Blatt 4 (Zusatzaufgabe 5, 7 und 8), Blatt 10 (Zusatzaufgabe 7), Blatt 11 (Zusatzaufgabe 5 und 6)
Neue Übungsaufgaben:

(a) Ist die Menge aller Fourierreihen von Funktionen aus $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ genau $c_0(\mathbb{Z})$?
(b) Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig, falls $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$? Konvergiert diese gleichmäßig, falls $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$? Reicht $f \in C^\alpha_{2\pi}(\mathbb{R})$ für $\alpha > 0$? Was ist mit $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$? In welchem der Fälle konvergiert die Fourierreihe absolut?

Wiederholungsaufgabe 4 (*Fouriermultiplikatoren auf dem Torus und weiteres Konvergenzverhalten der Fourierreihe*) (5*)
Um von der Konvergenz im Mittel für $L^p_{2\pi}$-Funktione auf die Konvergenz der Fourierreihe selbst zu kommen, musste man bestimmte **Fouriermultiplikatoren auf dem Torus** untersuchen. Es stellt sich heraus, dass dies (die **Konvergenz der Fourierreihe in $L^p_{2\pi}$**) äquivalent zur Beschränktheit der Hilberttransformation ist. Die Verbindung der **Hilberttransformation** mit **holomorpher Fortsetzung** ist in dem Zusammenhang besonders wichtig. Die Beschränktheit der Hilberttransformation auf dem Torus haben wir später in der Übung (und in der Vorlesung für die Hilberttransformation auf $\mathbb{R}$) mit der algebraischen Methode bewiesen. Dies lässt sich (zumindest für den Ganzraumfall $\mathbb{R}$) natürlich auch leicht aus der Calderon-Zygmund Theorie und dem Mikhlin Multiplikatorsatz ableiten. Über Transferenz Prinzipien, die teilweise in der Übung angeklungen sind, kann man sehen, dass der Torus und der Ganzraumfall äquivalent sind.
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 2 (§8), Kapitel 4 (§21)
Übungsaufgaben: Blatt 4 (Aufgabe 2, 4 und Zusatzaufgabe 6), Blatt 5 (Aufgabe 1 - 4)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 5 (Zusatzaufgabe 5, 6 und 8), Blatt 9 (Aufgabe 2), Blatt 12 (Zusatzaufgabe 7)
Neue Übungsaufgaben:

(a) Gibt es ein $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ derart, dass $\sigma_n(f)$ nicht gegen f in $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ konvergiert? Was ist mit $S_n(f)$ statt $\sigma_n(f)$?
(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{[-n,n]^d} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i \langle \xi, \cdot \rangle} \mathrm{d}\xi$$

Sinn macht und gegen f in $L^p(\mathbb{R}^d)$ konvergiert für alle $p \in (1,2]$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Wiederholungsaufgabe 5 (*Automatische vektorwertige Erweiterungen*) (5*)
Automatische vektorwertige Erweiterungen auf L^p-Räume und Hilberträume waren wichtige Mittel gegen Ende der Vorlesung und um eindimensionale Resultate mehrdimensional zu beweisen. Die zugehörigen Aussagen wurden in der Übung bewiesen.
Relevante Teile aus dem Skript: keine
Übungsaufgaben: Blatt 2 (Aufgabe 2 und Zusatzaufgabe 7), Blatt 3 (Aufgabe 4 und Zusatzaufgabe 7), Blatt 9 (Wiederholungsaufgabe 6)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 10 (Aufgabe 4)
Neue Übungsaufgaben:

(a) Es sei $T\colon X \to Y$ beschränkt und linear. Man zeige, dass es genau einen beschränkten linearen Operator $S\colon L^p(\Omega, X) \to L^p(\Omega, Y)$ gibt mit $S(f \cdot x) = f \cdot T(x)$ für $x \in X$ und $f \in L^p(\Omega)$.
(b) Man folgere daraus und aus Wiederholungsaufgabe 1 (a) die Aussage von Blatt 3 Aufgabe 4 erneut.

Wiederholungsaufgabe 6 (*Temperierte Distributionen, Faltungen, Fouriertransformation und andere elementare Operationen*) (5*)
Um mit der Fouriertransformation gut rechnen zu können, um möglichst allgemeine Zusammenhänge zu sehen und um Dinge möglichst kurz und intuitiv aufschreiben zu können haben wir eine Teilklasse der Distributionen, die **temperierten Distributionen** eingeführt. Diese verallgemeinern endliche Maße wie viele Funktionenklassen gleichermaßen. **Ableitungen** und **Fouriertransformation** sind dort elementare Operationen und unterliegen keiner Beschränkung. Die Ableitungen der Distributionen stimmen oft und die Fouriertransformation immer mit denen der Funktionenräume überein. Zudem erlauben temperierte Distributionen **Faltungen** und **Multiplikationen** mit bestimmten Funktionen $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$. Die Faltung für Distributionen ist wie die für Funktionen in der Lage die Distribution zu regularisieren. Es gibt diverse wichtige Rechenregeln, die in dem Zusammenhang im Skript bewiesen wurden. Die Distributionentheorie ist in der Lage Beweise zu verkürzen (Satz von Liouville, Poissonsche Summenformel) und eleganten Argumenten von Nicht-Mathematikern einen Sinn zu geben.
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 3 (§9-§14)
Übungsaufgaben: Blatt 6 (Aufgabe 2-4), Blatt 7 (Aufgabe 1-4)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 6 (Zusatzaufgabe 5-8), Blatt 7 (Zusatzaufgabe 5-8), Blatt 9 (Wiederholungsaufgabe 5), Blatt 13 (Zusatzaufgabe 5)
Neue Übungsaufgaben:

(a) Man zeige, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ dicht in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ liegt.
(b) Es sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Man zeige, dass es ein $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mit $v' = u$ gibt. Es seien $v_1, v_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mit $v_1' = v_2' = u$. Man zeige, dass $v_1 - v_2$ konstant ist.

Wiederholungsaufgabe 7 (*Translationsinvariante Operatoren, Faltungsoperatoren und Fouriermultiplikatoren*) (5*)

In diesem Teil der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Menge der translationsinvarianten Operatoren genau der Menge der **Fouriermultiplikatoren** entsprechen und diese der Menge der Faltungsoperatoren entspricht. Darüber hinaus wurde gezeigt, dass die Multiplikatoren notwendigerweise beschränkt sind.

Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 3 (§13 und §14)

Übungsaufgaben: Blatt 4 (Zusatzaufgabe 6), Blatt 8 (Aufgabe 1-3 und Zusatzaufgabe 7), Blatt 9 (Wiederholungsaufgabe 6)

Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 6 (Zusatzaufgabe 7), Blatt 8 (Zusatzaufgabe 6, 7 und 8)

Neue Übungsaufgaben:

(a) Es sei $T\colon L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ (für ein $p \in [1,\infty)$) translationsinvariant und beschränkt. Wie kann die Menge

$$\{q \in [1,\infty) : \ \exists C < \infty \text{ mit } \|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \text{ für alle } f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)\}$$

aussehen?

(b) Es sei $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ und $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist $\phi * m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$.

Wiederholungsaufgabe 8 (*Fouriermultiplikatoren auf L^1 und auf L^2*) (5*)

Die Menge $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^d)$ wurde mit $L^\infty(\mathbb{R})$ identifiziert. Damit ist das Multiplikatorproblem auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ vollständig gelöst. Des Weiteren wurde auch gezeigt, dass $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$ genau der Fouriertransformation der komplexen Maße (mit endlicher Variation) entspricht. Hier wurden also die Kerne der zugehörigen Faltungsoperatoren charakterisiert. Man hat **positive Distributionen** mit Maßen identifiziert (eine Aussage die auch für sich genommen interessant ist). Über ein Lemma von Grothendieck wurde gezeigt, dass jeder beschränkte Operator auf L^1 sich in eine gewichtete Summe von vier positiven Operatoren zerlegen lässt (auch diese Aussage ist für sich genommen interessant). Es ist also jeder beschränkte Operator auf L^1 regulär. Damit hat man gezeigt, dass die Fouriertransformation eines jeden Fouriermultiplikators auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ ein komplexes Maß ist. Die andere Richtung lässt sich leicht nachweisen.

Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 3 (§13 - §15)

Übungsaufgaben: Blatt 4 (Aufgabe 4), Blatt 8 (Aufgabe 4), Blatt 9 (Wiederholungsaufgabe 6) und sporadisch immer wieder

Weiterführende Übungsaufgaben: keine

Neue Übungsaufgaben:

(a) Gibt es $d \in \mathbb{N}$ und ein $i = 1, ..., d$ derart, dass die Riesz-Transformationen R_i eine Abschätzung der Form $\|R_i f\|_{L^1} \leq c\|f\|_{L^1}$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ erfüllt?

(b) Man gebe einen Fouriermultiplikator aus $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ an, der nicht in $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ liegt.

(c) Man gebe einen Fouriermultiplikator aus $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^d)$ an (d darf geeignet gewählt werden), der nicht in $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^d)$ liegt für mindestens ein $p \in (1,\infty)$.

Wiederholungsaufgabe 9 (*Interpolation und schwache Lebesgueräume*) (5*)
Es wurden die **schwachen Lebesgueräume** eingeführt, um die **Marcinkiewicz Interpolation** formulieren und beweisen zu können. Diese Intepolation hat keine Probleme auch vektorwertig formuliert und bewiesen zu werden. Sie ist in der Lage auch nicht-lineare Operatoren zu interpolieren, die auch nicht auf Banachräumen definiert sein müssen. Der einzige Nachteil ist, dass die Operatornorm der interpolierten Operatoren sich nicht optimal verhält. So interpolieren Kontraktionen nicht zu Kontraktionen. Diesen Defekt behebt die **Riesz-Thorin Interpolation**. Dafür gehen viele der guten Eigenschaften der Marcinkiewicz Interpolation verloren (Man benötigt lineare Operatoren die auf den starken L^p-Räumen definiert sind und vektorwertige Aussagen sind etwas schwerer zu beweisen als skalarwertige).
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 4 (§16-18)
Übungsaufgaben: Blatt 9 (Aufgabe 1 sowie Aufgabe 3 und 4), Blatt 10 (Aufgabe 1-5), Blatt 11 (Aufgabe 1 und 2)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 10 (Zusatzaufgabe 6 und 8), Blatt 11 (Zusatzaufgabe 5)
Neue Übungsaufgaben:

(a) Man zeige die Youngsche Ungleichung über Interpolation für komplexen Maßen an Stelle von $L^1(\mathbb{R}^d)$-Funktionen.
(b) Liegt $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^{p,\infty}(\mathbb{R})$ für ein $p \in [1, \infty]$?

Wiederholungsaufgabe 10 (*Maximaloperatoren und Konvergenz fast überall*) (5*)
Um bei einer Konvergenz von Operatoren auf einer dichten Menge in Norm zur Konvergenz für alle Vektoren zu kommen, benötigt man typischerweise eine gleichmäßige Abschätzung an die Operatornormen. Ersetzt man die Normkonvergenz durch die Konvergenz fast überall (die den Defekt hat nicht von einer Topologie zu kommen), dann übernimmt die Rolle der gleichmäßigen Abschätzung die schwache (p, p) Beschränktheit eines Maximaloperators. Dass dies tatsächlich ausreicht eine solche Abschätzung zur Hand zu haben war ein zentrales Resultat. Zudem haben wir die Beschränktheit einiger **Maximaloperatoren** gezeigt. Zentral dafür war der **Überdeckungssatz von Vitali** und die Marcinkiewicz Interpolation.
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 4 (§19 und §20)
Übungsaufgaben: Blatt 11 (Aufgabe 3, 4 und Zusatzaufgabe 7), Blatt 12 (Aufgabe 2, 3 sowie Zusatzaufgabe 5 und 6)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 11 (Zusatzaufgabe 8)
Neue Übungsaufgaben:

(a) Es sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gegeben. Weiter sei $\int \phi = 1$ und $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\phi(\epsilon^{-1}x)$. Konvergiert dann $\phi_\epsilon * f$ fast überall gegen f für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, falls $\epsilon \to 0$?
(b) Es sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger gegeben. Weiter sei $\int \phi = 1$ und $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\phi(\epsilon^{-1}x)$. Konvergiert dann $\phi_\epsilon * f$ fast überall gegen f für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, falls $\epsilon \to 0$?

Wiederholungsaufgabe 11 (*Calderon-Zygmund Theorie*) (10*)
Ein zentrales Resultat der harmonischen Analyse ist die **Calderon-Zygmund Extrapolation**. Diese bassiert auf der **Calderon-Zygmund Zerlegung**, welche eine Funktion zerlegt in einen *guten* Teil, welche integrierbar und beschränkt ist, und einen *schlechten* Teil der oszilliert. Das Bild des guten Teils unter dem Operator kann durch die Beschränktheit des Operators auf einem L^r-Raum kontrolliert werden. Um oszillierende Teile (wie den schlechten Teil) zu kontrollieren benötigt man typischerweise eine Glattheitsbedingung. Eine sehr schwache Form der Glattheit, die hier genügt, ist die Hörmanderbedingung. So kann man eine schwache $(1, 1)$ Abschätzung zeigen und mit Interpolation und Dualität den gesammten L^p-Bereich abdecken.
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 4 (§22 und §23)
Übungsaufgaben: Blatt 13 (Aufgabe 1-3 und Zusatzaufgabe 4)
Weiterführende Übungsaufgaben: Blatt 13 (Zusatzaufgabe 5 und 6)
Neue Übungsaufgaben:

(a) Man formuliere und zeige eine Version der Calderon-Zygmund Extrapolation für Operatoren auf $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ (für $p \in (1, \infty)$) und folgere daraus wieder die Beschränktheit der Hilberttransformation auf dem Torus.
(b) Es sei $p, q \in (1, \infty)$ und $T \colon L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ ein linearer beschränkter Operator der die Voraussetzungen der Calderon-Zygmund Extrapolation erfüllt. Man zeige, dass es einen eindeutigen linearen beschränkten Operator $S \colon L^p(\mathbb{R}^d, L^q(\Omega)) \to L^p(\mathbb{R}^d, L^q(\Omega))$ gibt mit $S(f \cdot g) = T(f) \cdot g$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\Omega)$.

Wiederholungsaufgabe 12 (*Littlewood-Paley Theorie und Multiplikatorsätze*) (20*)
Das Problem an der Calderon-Zygmund Theorie ist, dass man den Kern zum Multiplikator kennen muss. Da aber die Berechnung des Kerns über die Fouriertransformation nur selten möglich und dann auch mühsam ist, wären Bedingungen allein an den Multiplikator hilfreich. Ein soches Resultat ist der **Mihklin Multiplikatorsatz**. Der Beweis, welchen wir gegeben haben, liese sich leicht mehrdimensional und L^p-wertig führen. Dieser bassiert auf einer zur L^p-Norm (nicht offensichtlich) äquivalenten Norm, welche durch die **Littlewood-Paley Theorie** gegeben wird. Aus dieser und den **Quadratfunktionsabschätzungen** für Multiplikatoren lässt sich so der Mikhlin Multiplikatorsatz und ein abstrakter Multiplikatorsatz zeigen.
Relevante Teile aus dem Skript: Kapitel 4 (§24)
Übungsaufgaben: Nur sporadische Verbindungen in vorigen Übungsblättern (Blatt 12 Aufgabe 4 und Zusatzaufgabe 8). Bemerkungen sind aber in den Lösungen von Blatt 13 zu finden.
Weiterführende Übungsaufgaben: Keine
Neue Übungsaufgaben:

(a) Man zeige, dass $m = \sum_k a_k \mathbb{1}_{[2^k, 2^{k+1}]} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ für alle $a = (a_k) \in \ell^\infty$ und $p \in (1, \infty)$ gilt.
(b) Es sei $m \in L^\infty(\mathbb{R})$. Weiter habe m einen monotonen Vertreter in I für $I \in \mathcal{D}$. Man zeige $m \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
(c) Es sei $p \in (1, \infty)$ gegeben. Man zeige, dass

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \sim \left\| \left(\overline{\mathcal{F}}(\mathbb{1}_{I \times J}) * f \right)_{(I,J) \in \mathcal{D}^2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2, \ell^2(\mathcal{D}^2))}$$

für $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ gilt (Aus dieser Version - die man genauso auch d-dimensional zeigen kann - kann man mit Hilfe einer mehrdimensionalen Verallgemeinerung der Quadratfunktionsabschätzung den mehrdimensionalen Mikhlin beweisen).