ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 5

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **25.11.2016** um spätestens **10ct**.

Aufgabe 1 (*Hilberttransformation und holomorphe Fortsetzung*) (10)
Es sei H die Hilberttransformation auf $L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$. Für $f, g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ gilt $g = Hf$ genau dann, wenn zwei holomorphe Funktionen $h_{\mathrm{Re}}, h_{\mathrm{Im}} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ existieren derart, dass $h_{\mathrm{Re}}(0), h_{\mathrm{Im}}(0) \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{r\to 1-} h_{\mathrm{Re}}(re^{it}) = \operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Re} g(t) \text{ und } \lim_{r\to 1-} h_{\mathrm{Im}}(re^{it}) = \operatorname{Im} f(t) + i \operatorname{Im} g(t)$$

gilt, wobei die Konvergenz in $L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ zu verstehen ist. Beweisen Sie von dieser Aussage nur die Existenz solcher Funktionen, falls $Hf = g$ gilt.

Aufgabe 2 (*Einfache Manipulationen von Fouriermultiplikatoren*) (10)
Es seien $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $M_1 = (M_k^{(1)})_{k\in\mathbb{Z}}$, $M_2 = (M_k^{(2)})_{k\in\mathbb{Z}}$ $L^p_{2\pi}(\mathbb{C})$-Fouriermultiplikatoren (für $p \in [1,\infty]$). Weiter seien gegeben $a, b \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{Z}$ und $q \in [1,\infty]$ derart, dass $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt. Man zeige, dass M ein Fouriermultiplikator in $L^q_{2\pi}(\mathbb{C})$ ist und, dass

$$aM_1 + bM_2,\ M_1 \cdot M_2, \text{ und } (M_{k+l})_{k\in\mathbb{Z}}$$

Fouriermultiplikatoren auf $L^p_{2\pi}(\mathbb{C})$ sind.

Aufgabe 3 (*Ein Fouriermultiplikator in zwei Dimensionen*) (10)
In dieser Aufgabe dürfen Sie verwenden, dass die Riesz-Projektion $R \colon L^p(-\pi,\pi) \to L^p(-\pi,\pi)$ für $p \in (1,\infty)$ beschränkt sind. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4 auf Blatt 3, dass es genau einen beschränkten Operator $T \colon L^p((-\pi,\pi)^2) \to L^p((-\pi,\pi)^2)$ gibt mit

$$\hat{Tf}(k,l) = \mathbb{1}_{\{k,l\geq 0\}}(k,l)\hat{f}(k,l)$$

für alle $f \in L^p((-\pi,\pi)^2)$. Dabei ist

$$\hat{f}(k,l) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{(-\pi,\pi)} \int_{(-\pi,\pi)} f(x_1,x_2) e^{-ikx_1 - ilx_2} \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Aufgabe 4 (*Konvergenz der Fourierreihe in zwei Dimensionen*) (10)
Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 3, dass

$$\sum_{|k|,|l|\leq n} \hat{f}(k,l) e^{ikx_1 + ilx_2}$$

in $L^p((-\pi,\pi)^2)$ gegen f konvergiert für $n \to \infty$.
Bemerkung: Im Gegensatz dazu konnte Charles Fefferman zeigen, dass für $p \neq 2$

$$\sum_{|k|^2+|l|^2\leq n} \hat{f}(k,l) e^{ikx_1 + ilx_2}$$

nicht für alle $f \in L^p((-\pi,\pi)^2)$ gegen f in $L^p((-\pi,\pi)^2)$ konvergiert. Beachten Sie, wie minimal die Veränderung ist!

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5 (*Eine nützliche Formel für die Hilberttransformation*) (10*)
Es bezeichne H die Hilberttransformation auf $C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R})$. Man zeige

$$(Hf)^2 = f^2 + 2H(f(Hf)) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Hf)^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dazu untersuche man, ob es eine stetige Fortsetzung von $(f + iH(f))^2$ aufgefasst als Funktion auf $\mathbb{T}$ nach $\overline{\mathbb{D}}$ gibt, die holomorph in $\mathbb{D}$ ist.

Zusatzaufgabe 6 (*Beschränktheit der Hilberttransformation für besondere Werte von* p) (10*)
Man zeige mit Hilfe von Zusatzaufgabe 5 über Induktion, dass

$$k \mapsto -i \operatorname{sgn} k$$

ein $L^p(\mathbb{C})$-Fouriermultiplikator ist für $p = 2^n$ $(n \in \{1, 2, 3, ...\})$ und für $p = 2^n(2^n - 1)^{-1}$ $(n \in \{1, 2, 3, ...\})$.

Zusatzaufgabe 7 (*Konvergenz eines Fresnel-Integrals*) (10*)
Diese Aufgabe vertieft nicht die Vorlesung. Das Ziel ist es hier etwas Verständnis dafür zu entwickeln, wie Oszillation bei Konvergenz hilfreich ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

als uneigentliches Riemann-Integral existiert.

Zusatzaufgabe 8 (*$L_{2\pi}^1$ ist nicht UMD, was auch immer das ist*) (10*)
Es sei $M = (-i \operatorname{sgn} k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Man berechne die Funktion $h \in C_{2\pi}^{\infty}(C_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{C}))$ für die $\hat{h}(k) = -i \operatorname{sgn} k \cdot \hat{g}(k)$ gilt, wobei

$$g(t)(s) = f(t + s)$$

für ein $f \in C_{2\pi}^{\infty}$ ist. Man folgere daraus, dass $(-i \operatorname{sgn} k)_{k\in\mathbb{Z}}$ kein $L_{2\pi}^2(L_{2\pi}^1(\mathbb{C}))$-Fouriermultiplikator ist.