ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Manuel Bernhard
Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt 9

Harmonische Analysis

Übungsaufgaben sind abzugeben am Freitag **13.1.2017** um spätestens **10ct**.

Weihnachtsgeschenk: Man kann diesmal 80 Punkte für die Vorleistung sammeln

---

Aufgabe 1 (*Beschränktheit der Hilberttransformation auf dem Torus*) (10)
Man zeige mit Hilfe von Zusatzaufgabe 6 auf Blatt 5 und Riesz-Thorin, dass $-i \operatorname{sgn} x$ ein $L^p_{2\pi}$-Fouriermultiplikator ist für $p \in (1, \infty)$.

Aufgabe 2 (*Charakteristische Funktion von Zufallsvektoren*) (10)
Es sei X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable. Es sei μ_X die zugehörige Verteilung auf $\mathbb{R}^d$, d.h. $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und φ_X sei die charakteristische Funktion, d.h. $\varphi_X(x) = \mathbb{E}\exp(i(x|X))$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Man zeige

$$\varphi_X(2\pi\cdot) = \overline{\mathcal{F}}(\mu_X)$$

und folgere daraus (d.h. indem man die auf Eigenschaften der Fouriertransformation zurückführt)

(a) Die Verteilung von X und Y sind genau dann identisch, wenn $\varphi_X = \varphi_Y$ gilt.
(b) Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in Verteilung gegen eine andere Zufallsvariable X, wenn φ_{X_n} punktweise gegen φ_X konvergiert.
(c) Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in Verteilung gegen eine andere Zufallsvariable, wenn φ_{X_n} punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert.

Aufgabe 3 (*Die Dreiecksungleichung ist in schwach-L^p verletzt*) (10)
Es sei $p \in [1, \infty)$. Man finde $f, g \in L^{p,\infty}(\mathbb{R})$ derart, dass nicht $\|f + g\|_{p,\infty} \le \|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}$ gilt.

Aufgabe 4 (*Quasi-Dreiecksungleichung für schwach-L^p*) (10)
Es sei $p \in [1, \infty)$, X ein Banachraum und $f_1, ..., f_n \in L^{p,\infty}_X(\Omega, \Sigma, \mu)$. Man zeige

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{p,\infty} \le n \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{p,\infty}$$

Wiederholungsaufgabe 5 (*Distributionentheorie - Fundamentallösung für den Laplace*) (20*)
Wir wollen die Gleichung $\Delta u = \delta_0$ auf $\mathbb{R}^d$ lösen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}$ die Menge der harmonischen Polynome auf $\mathbb{R}^d$, d.h. die Menge der Funktionen der Gestalt $p(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,\ |\alpha|_\infty \le n} c_\alpha x^\alpha$ mit $\Delta p = 0$, wobei $|\cdot|_1$ die Summe der Einträge bezeichnet.

(a) Man zeige, dass es eine Lösung u gibt und diese bis auf $\mathcal{N}$ eindeutig bestimmt ist.
(b) Die Lösung ist wichtig, weil für jedes $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ automatisch $\Delta(\phi * u) = \phi$ gilt (Beweis!).
(c) Man zeige, dass $u - u(O\cdot) \in \mathcal{N}$, $r^{2-d}u - u(r\cdot) \in \mathcal{N}$ (man mache sich auch klar, wie $u(r\cdot)$ und $u(O\cdot)$ zu definieren sind) für jedes $r > 0$ und $O \in O(d)$ gilt (d.h. u ist rotationssymmetrisch und $(2-d)$-homogen bis auf Funktionen aus $\mathcal{N}$).
(d) Man finde eine Funktion $v \notin \mathcal{N}$ mit den Eigenschaften aus (c).
(e) Man zeige, dass man eine Konstante c findet, sodass $u = cv$ die Gleichung löst und gebe an, wie man die Konstante bestimmen kann (muss nicht berechnet werden).

Bitte wenden!

Wiederholungsaufgabe 6 (*Vektorwertige Probleme und Fouriermultiplikatoren*) (10*)

(a) Zeigen Sie, dass $-i \operatorname{sgn} x$ kein $L^1(\mathbb{R})$-Fouriermultiplikator ist.

(b) Nehmen Sie an, dass wir bereits $-i \operatorname{sgn} x \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ für $p \in (1, \infty)$ gezeigt haben. Zeigen Sie, damit, dass jede Funktion $m = \sum c_P \mathbb{1}_P$, wobei die Summe nur über endlich viele Polyeder P geht, ein $L^p(\mathbb{R}^d)$-Fouriermultiplikator ist.

Wiederholungsaufgabe 7 (*Anwendung auf elliptische Differentialgleichungen*) (10*)

(a) Man finde diejenigen $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $\Delta^2 u + \lambda u = v$ für jedes $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ hat.

(b) Man zeige, dass für diese λ, $p = 2$ und $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ automatisch $u \in W^{4,p}(\mathbb{R}^d)$ folgt und es ein $C_{\lambda,p} < \infty$ unabhängig von u und v mit

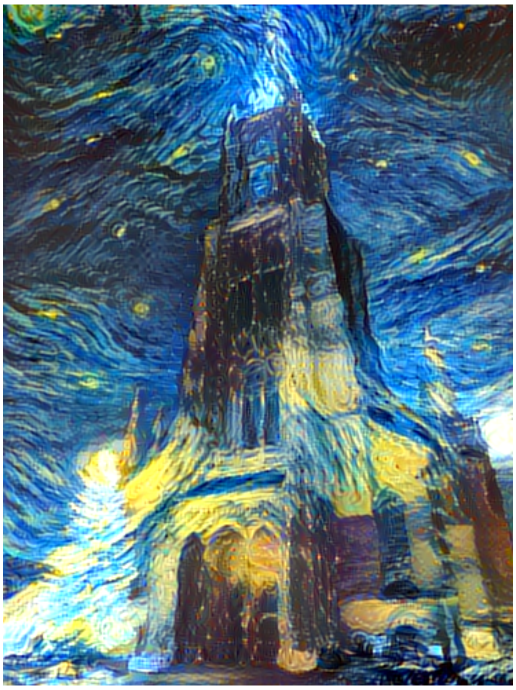
$$\|u\|_{W^{4,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\lambda,p} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

gibt.

(c) Man zeige, dass es für alle p groß genug abhängig von d ein $C > 0$ abhängig von p gibt derart, dass für alle $\|g\|_p \leq C$

$$f + \Delta^2 f = \exp(\partial_1^3 f)\partial_1^4 f + g$$

eine Lösung $f \in W^{4,p}(\mathbb{R}^d)$ hat. Man darf ohne Beweis alle Sobolev-Ungleichungen und die Aussage in (b) für alle $p \in (1, \infty)$ benutzen.



Wir wünschen schöne und erholsame Ferien
sowie einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Das Orginalbild vom Ulmer Münster stammt von https://pixabay.com. Dieses hat ein Algorithmus, welcher ein neuronales Netzwerk aus **Faltungen** - ein einfaches Model des Visuellen Cortex - benutzt, im Stil eines Kunstwerkes - in diesem Fall handelt es sich um *Sternennacht von Vincent van Gogh* - nachgezeichnet. Der verwendete Algorithmus wurde in einem Paper von Leon A. Gatys, Alexander S. Ecker, und Matthias Bethge vorgestellt. Verschiedene Implementierungen finden sich auf Github.