UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Freitag, 10.6.2016

Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 8

1. Sei $I = (0,1)$, $f \in L_2(I)$, $a \in L_\infty(I)$, und es gebe ein $a_0 > 0$, sodass $a(x) \geq a_0$ für f.a. $x \in I$. Dann ist aus der Vorlesung bekannt, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & x \in I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung $u \in \mathring{H}^1(I)$ besitzt.

Zeige, dass für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

$$f \in H^m(I) \text{ und } a \in C^{m+1}(\overline{I}) \Rightarrow u \in H^{m+2}(I).$$

2. Sei $a\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ definiert durch $a(x) = \sqrt{2x - x^2}$. Gesucht ist eine Funktion $u\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, die das Randwertproblem

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = 1, & x \in (0,2) \\ u(0) = u(2) = 0 \end{cases}$$

löst.

(a) Ist die Theorie aus der Vorlesung (vgl. Satz 2.83) hier anwendbar?

(b) Löse das Randwertproblem mit herkömmlichen Methoden und diskutiere, in welchem Funktionenraum die Lösung liegt bzw. nicht liegt.

3. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und konvex. Zeige: Es existiert eine Konstante $C > 0$, die von p und G abhängt, sodass für alle $u \in W_p^1(G)$ gilt:

$$\|u - \overline{u}_G\|_{L_p(G)} \leq C\|\nabla u\|_{L_p(G)}.$$

Dabei ist $\overline{u}_G = \frac{1}{|G|}\int_G u(x)\,\mathrm{d}x$.

Tipp: Zeige zunächst, dass für $u \in C^1(G) \cap W_1^1(G)$ mit $\overline{u}_G = 0$ gilt:

$$|u(x)| \leq \frac{d^n}{n|G|}\int_G \frac{\nabla u(y)}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y \quad \forall x \in G.$$

Dabei ist $d := \sup_{x,y \in G}|x - y|$ (Durchmesser von G). Wende dann die Youngsche Ungleichung ($\|f * g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$) auf eine geeignete Fortsetzung des obigen Integrals an.

4. (a) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) + \alpha u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tipp: Führe das Problem durch eine geeignete Substituion der Form $v(t,x) = u(t,x) \cdot e^{\lambda t}$ auf die Lösung in (a) zurück.

(c) Seien $u_1, \dots, u_n \colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen der Gleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

Zeige, dass $U \colon (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $U(t,x) = \Pi_{i=1}^n u_i(t,x_i)$ eine Lösung der Gleichung

$$\partial_t U - \Delta U = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

ist. Löse damit und mit Hilfe der Lösung aus (a) das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) - \Delta v(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ v(0,x) = e^{-|x|^2}, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$