Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 17.6.2016

Prof. Dr. R. Zacher
Dr. Dominik Dier
Sommersemester 16
Punktzahl: 10

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 9

1. Sei $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $u(t,x) = (H_t * u_0)(x)$, wobei H_t der Wärmeleitungskern ist.

(a) Zeige:
$$\|H_t\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \quad \forall t > 0.$$

(b) Zeige: Es existiert ein $c > 0$, sodass
$$\|u(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq ct^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t > 0.$$
Insbesondere ist $\|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq ct^{-\frac{n}{4}}\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ für alle $t > 0$.

(c) Es gelte $\hat{u}_0(0) \neq 0$. Zeige: Es existieren $c > 0$, $T > 0$, sodass
$$\|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geq ct^{-\frac{n}{4}} \quad \forall t \geq T.$$
[Hinweis: Verwende den Satz von Plancherel. Die Voraussetzung $\hat{u}_0(0) \neq 0$ impliziert: Es existieren $\varrho_0 > 0$, $c_1 > 0$, sodass $\frac{1}{\varrho^n}\int_{B_\varrho(0)}|\hat{u}_0(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \geq c_1$ für alle $\varrho \in (0, \varrho_0]$.]

2. Sei $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $M := \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \,\mathrm{d}x$ und $u(t,x) = (H_t * u_0)(x)$.

(a) Ist zusätzlich $xu_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, so existiert ein $C > 0$, sodass
$$\|u(t,\cdot) - MH_t\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-1/2}\|xu(x)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t > 0.$$

(b) Schließe mit Teil (a) und geeigneter Approximation von u_0:
$$\|u(t,\cdot) - MH_t\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{für } t \to \infty.$$

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeige: Das Endwertproblem
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{in } (-T,0) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$
besitzt im Allgemeinen keine Lösung
$$u \in C^{1,2}((-T,0) \times \mathbb{R}^n) \cap C([-T,0] \times \mathbb{R}^n) \cap L_\infty((-T,0) \times \mathbb{R}^n).$$

4. Sei $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = e^{\frac{-1}{t^2}}$ für $t > 0$ und $\varphi(0) = 0$. Wir definieren
$$u(t,x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t) & : t > 0 \\ 0 & : t = 0. \end{cases}$$

(a) Angenommen $|\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)| \leq cn!(\frac{t}{2})^n$ für ein $c > 0$. Zeige: $u \in C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ erfüllt
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(b) Zeige mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, dass die Annahme an φ erfüllt ist.