



---

## Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 1

---

1. *Wichtige Banach- und Nicht-Banachräume.* Überprüfe die folgenden normierten Vektorräume auf Vollständigkeit. In Worten der Vorlesung: Sind folgende normierte Vektorräume Banachräume?

(a)  $E_1 = c_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0\}$  mit  $\|(x_n)\|_{E_1} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ . (4)

(b)  $E_2 = C[-1, 1] := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$  mit  $\|f\|_{E_2} := \int_{-1}^1 |f(t)| dt$ . (4)

2. *Berechnung von Fourierreihen.* Berechnen Sie die formalen Fourierreihen der  $2\pi$ -periodischen Fortsetzungen der Funktionen  $f_i : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

(a)  $f_1(t) = t$ . (3)

(b)  $f_2(t) = |t|$ . (3)

(c)  $f_3(t) = \frac{m}{2} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]}(t)$  für  $m \in \mathbb{N}$ . Bestimme zusätzlich das Verhalten der Fourierkoeffizienten für  $m \rightarrow \infty$ . Wie verhält sich die Werteverteilung der Fourierkoeffizienten gegenüber der Werteverteilung der Funktion (für große  $m$ )? (3)

3. *Kriterium für gleichmäßige Konvergenz der Fourierkoeffizienten.* Es seien  $f_n, f \in L^1_{2\pi}$  mit  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1_{2\pi}$ . Zeige, dass dann die Fourierkoeffizienten  $\widehat{f}_n(k) \rightarrow \widehat{f}(k)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gleichmäßig in  $k$  konvergieren. (3)