Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 2

4. *Verhalten der Fourierkoeffizienten unter Translation.* Sei $f \in C_{2\pi}$. Definiere $g_a(t) := f(t+a)$ für $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\widehat{g_a}(k) = e^{ika}\hat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt. (2)

5. *Charakterisierung gerader Funktionen durch die Fourierkoeffizienten.* Sei $f \in C_{2\pi}$ und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

die formale reelle Fourierreihe von f. Zeige, dass f genau dann gerade ist (d.h. $f(t) = f(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$), wenn $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. (4)

6. *Konvergenz im Cesàro-Sinne.* In dieser Aufgabe wollen wir uns an diesen neuen Grenzwertbegriff gewöhnen.

(a) Zeige oder widerlege: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen komplexer Zahlen und $a_\infty, b_\infty \in \mathbb{C}$. Ist $C - \lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$ und $C - \lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$, so ist auch $C - \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a_\infty + b_\infty$. (2)

(b) Zeige oder widerlege: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen komplexer Zahlen und $a_\infty, b_\infty \in \mathbb{C}$. Ist $C - \lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$ und $C - \lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$, so ist auch $C - \lim_{n\to\infty} a_n b_n = a_\infty b_\infty$. (2)

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a_\infty \in \mathbb{C}$. Zeige: Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$, so ist auch $C - \lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$. (3)

(d) Gebe ein Beispiel einer beschränkten Folge, die nicht im Cesàro-Sinne konvergiert. (3)

7. *Stetigkeit des Skalarprodukts.* Im folgenden sei E ein komplexer Prähilbertraum.

(a) Zeige, dass das Skalarprodukt in E als Abbildung $E \times E \to \mathbb{C}$ stetig ist, d.h. aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ in E folgt $(x_n|y_n) \to (x|y)$. (2)

(b) Sei $M \subset E$ eine Teilmenge. Man nennt $M^\perp := \{x \in E : (x|y) = 0 \; \forall\, y \in M\}$ das orthogonale Komplement von M. Zeige, dass $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von E ist. (2)