UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 9.5.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 3

8. *Lineare Operatoren.* Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $T : E \to E$ linear.

(a) Es gebe $C \geq 0$ derart, dass $\|Tx\| \leq C \|x\|$ für alle $x \in E$. Zeige: T ist stetig. (1)

Lösung: Sei $x_n \to x$. Dann ist

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq C \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Also gilt $Tx_n \to Tx$. Somit ist T stetig.

(b) Es seien $T_n : E \to E$ $(n \in \mathbb{N})$ linear und es gebe ein $C \geq 0$ mit $\|T_n x\| \leq C \|x\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|Tx\| \leq C \|x\|$ $(x \in E)$. Ferner gebe es eine dichte Teilmenge D von E derart, dass $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in D$. Zeige: Es ist $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in E$.
Hinweis: Vergleiche mit dem Beweis des Satzes 4.2 über die orthogonale Entwicklung. (3)

Lösung: Sei $x \in E$ und $\epsilon > 0$. Es gibt ein $y \in D$ mit $\|x - y\| < \epsilon$, da D dicht in E liegt. Da nach Voraussetzung $T_n y \to Ty$ gilt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n y - Ty\| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für $n \geq N$

$$\begin{aligned}\|Tx - T_n x\| &= \|Tx - Ty + Ty - T_n y + T_n y - T_n x\| \\ &\leq \|T(x-y)\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n(y-x)\| \leq 2C \|x - y\| + \|Ty - T_n y\| \\ &\leq (2C+1)\epsilon.\end{aligned}$$

Also gilt $T_n x \to Tx$, was zu zeigen war.

9. *Polarisationsformel.* Sei V ein reeller Vektorraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Wir setzen $a(v) \coloneqq a(v, v)$. Zeige, dass für $v, w \in V$ die Polarisationsformel (2)

$$a(v, w) = \frac{1}{4}(a(v + w) - a(v - w)) \qquad \text{gilt.}$$

Bemerkung: Ist V ein komplexer Vektorraum und a eine hermitesche Sesquilinearform auf V, so gilt $a(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k a(v + i^k w)$. Dies müssen Sie nicht zeigen!

Lösung: Direktes Nachrechnen unter Verwendung der Symmetrie ergibt

$$\begin{aligned}a(v + w) - a(v - w) &= a(v, v) + a(v, w) + a(w, v) + a(w, w) - a(v, v) + a(v, w) \\ &\quad + a(w, v) - a(w, w) = 4a(v, w).\end{aligned}$$

10. *Satz von Jordan-von Neumann.* Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Wir wollen in dieser Aufgabe den Satz von Jordan-von Neumann zeigen:
Die Norm auf E wird genau dann von einem Skalarprodukt induziert (d.h. es gibt ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf E mit $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ für alle $x \in E$), wenn die Norm die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

erfüllt.

(a) Zeige: Wird die Norm vom einem Skalarprodukt induziert, so gilt die Parallelogrammgleichung. (2)

Lösung: Wird die Norm von dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ induziert, so erhält man durch Nachrechnen unter Verwendung der Symmetrie

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (x+y|x+y)+(x-y|x-y)\\ &= (x|x)+(x|y)+(y|x)+(y|y)+(x|x)-(x|y)-(y|x)+(y|y)\\ &= 2(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

(b) Zeige: Gilt die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|$, so ist für alle $x_1, x_2, y \in E$ (4)

$$\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2=\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2-\|x_1-y\|^2-\|x_2-y\|^2\,.$$

Lösung: Es ist unter Verwendung der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned}&\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2-\|x_1+y\|^2-\|x_2+y\|^2+\|x_1-y\|^2+\|x_2-y\|^2\\ &= \|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2-\|x_1+y\|^2-\|x_2\|^2-\|x_2+y\|^2-\|x_1\|^2\\ &\quad+\|x_1-y\|^2+\|x_2\|^2+\|x_2-y\|^2+\|x_1\|^2\\ &= \|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2\\ &\quad-\frac{1}{2}(\|x_1+x_2+y\|^2+\|x_1-x_2+y\|^2)-\frac{1}{2}(\|x_1+x_2+y\|^2+\|x_2-x_1+y\|^2)\\ &\quad+\frac{1}{2}(\|x_1+x_2-y\|^2+\|x_1-x_2+y\|^2)+\frac{1}{2}(\|x_1+x_2-y\|^2+\|x_2-x_1+y\|^2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(c) Zeige: Gilt die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|$, so ist für alle $x, y \in E$ und $q \in \mathbb{Q}$ (4)

$$\|qx+y\|^2-\|qx-y\|^2=q(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2).$$

Lösung: Aus Aufgabenteil (b) folgt die Gültigkeit der Gleichung für $q=2$, wenn man $x_1=x_2=x$ wählt. Induktiv folgt nun die Gültigkeit für alle $q\in\mathbb{N}$. Wegen

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=n(\left\|n^{-1}x+y\right\|^2-\left\|n^{-1}x-y\right\|^2)$$

für $n\in\mathbb{N}$ gilt die Gleichung für alle $q\in\mathbb{Q}_+$. Aus

$$0=\|(q-q)x+y\|^2-\|(q-q)x-y\|^2$$

für $q\in\mathbb{Q}_+$ und der Additivität aus Aufgabenteil (b) folgt nun die Behauptung.

(d) Zeige: Gilt die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|$, so wird $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert. (4)

Lösung: Gilt die Parallelogrammgleichung, so setzen wir

$$(x|y):=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2).$$

Dies ist nach der Polarisationsformel die einzige mögliche Definition. Wir müssen überprüfen, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt definiert. Die Symmetrie sieht man sofort, die postive Definitheit ist wegen $(x,x)=\|x\|^2$ (so wurde unser Skalarprodukt ja gerade gewählt!) auch klar. Es bleibt also die Linearität in einer Komponente zu zeigen. Die Additivität haben wir bereits in Teil (b) überprüft, die Homogenität haben wir für $\lambda\in\mathbb{Q}$ in Teil (c) gezeigt. Sei nun $\lambda\in\mathbb{R}$ beliebig. Es gibt dann $\lambda_n\in\mathbb{Q}$ mit $\lambda_n\to\lambda$. Wegen der Stetigkeit der Norm gilt dann

$$(\lambda x|y)=\lim_{n\to\infty}(\lambda_n x|y)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(x|y)=\lambda(x|y).$$

$(\cdot|\cdot)$ ist somit das gesuchte Skalarprodukt.