Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 23.5.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 5

14. *Multiplikatoren.* Sei H ein Hilbertraum und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Für eine Folge $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir den Multiplikationsoperator

$$T_m : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} m_n(x|e_n)e_n.$$

Zeige: Es gilt $T_m \in \mathcal{L}(H)$ genau dann, wenn (m_n) beschränkt ist. Ferner ist in diesem Fall $\|T_m\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$. (6)

15. *Zur Definition von beschränkten Operatoren.* Es seien E, F normierte Vektorräume und sei $T : E \to F$ ein beschränkter linearer Operator, d.h. es gibt ein $C \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq C\,\|x\|$ für alle x in E. Man schreibt $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

(a) Wir definieren anderst als in der Vorlesung

$$\|T\| := \inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\,\|x\| \text{ für alle } x \in E\}.$$

Zeige, dass das Infimum ein (wie in der Vorlesung definiert) Minimum ist. (2)

(b) Sei nun ferner $S \in \mathcal{L}(E, F)$. Zeige, dass $S + T \in \mathcal{L}(E, F)$ und (2)

$$\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|.$$

(c) Zeige: $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$. (3)

(d) Ist das Supremum aus dem vorherigen Teil im allgemeinen ein Maximum? (4)

16. *Orthogonale Projektionen sind selbstadjungiert.* Sei H ein Hilbertraum, H_1 ein abgeschlossener Unterraum von H und P die orthogonale Projektion auf H_1. Zeige: P ist selbstadjungiert, d.h. (3)

$$(Px|y) = (x|Py) \qquad \text{für alle } x, y \in H.$$