# Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 13.6.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

## Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 8

**23.** *Stetigkeit der Norm.* Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ stetig ist. (3)

**Tipp:** Zeige zuerst die umgekehrte Dreiecksungleichung $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$ für $x, y \in E$.

**Lösung:** Aus der Dreiecksungleichung folgt für $x, y \in E$, dass $\|x\| \le \|x - y\| + \|y\|$, also $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$. Vertauscht man $x$ und $y$, so gilt ebenso $\|y\| - \|x\| \le \|x - y\|$. Hieraus folgt direkt $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$. Wir zeigen nun die Stetigkeit der Normabbildung. Sei $\epsilon > 0$. Für $\|x - y\| \le \delta := \epsilon$ ist dann nach der umgekehrten Dreiecksungleichung $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| \le \epsilon$. Also ist $x \mapsto \|x\|$ stetig.

**24.** *Satz über die stetige Fortsetzbarkeit.* Sei $F$ ein normierter Vektorraum und $E$ ein Banachraum. Es gebe einen dichten Unterraum $F_0 \subset F$ und $T_0 \in \mathcal{L}(F_0, E)$. Zeige: Es gibt eine eindeutige Fortsetzung $T \in \mathcal{L}(F, E)$ mit $\|T\| = \|T_0\|$. (6)

**Lösung:** Sei $x \in F$. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subset F_0$ mit $x_n \to x$. Insbesondere ist $(x_n)$ eine Cauchyfolge in $F_0$. Wegen

$$\|T_0 x_n - T_0 x_m\| = \|T_0(x_n - x_m)\| \le \|T_0\| \, \|x_n - x_m\|$$

ist $(T_0 x_n)$ eine Cauchyfolge in $E$. Da $E$ vollständig ist, gibt es ein $y \in E$ mit $\lim_{n\to\infty} T_0 x_n = y$. Wir setzen also $Tx = \lim_{n\to\infty} T_0 x_n$ für eine Folge $(x_n) \subset F_0$ mit $x_n \to x$. Wir müssen zeigen, dass dies wohldefiniert ist, d.h. unsere Definition von $Tx$ hängt nicht von der Wahl der Folge $(x_n)$ mit $x_n \to x$ ab. Sei $(z_n)$ eine weitere Folge mit dieser Eigenschaft. Dann ist

$$\left\| \lim_{n\to\infty} T_0 x_n - \lim_{n\to\infty} T_0 z_n \right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_0(x_n - y_n)\| \le \|T_0\| \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Also ist $T$ wohldefiniert. Die Linearität folgt nun sofort mit den Rechenregeln für Grenzwerte. Es bleibt die Beschränktheit zu zeigen. Sei $(x_n)$ mit $x_n \to x$ wie oben. Dann ist

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_0 x_n\| \le \|T_0\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T_0\| \, \|x\|.$$

Also ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$ mit $\|T\| \le \|T_0\|$. Durch die Wahl von konstanten Folgen in $F_0$ sieht man sofort, dass $T_{|F_0} = T_0$. Somit ist $\|T\| \ge \|T_0\|$. Also gilt $\|T\| = \|T_0\|$.

**25.** *Bedingte Erwartung.* Alle Vektorräume sind in dieser Aufgabe reell. Sei $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte messbare Mengen mit positivem Maß und $\cup_{k=1}^n A_k = \Omega$.

(a) Bestimme die von $A_1, \ldots, A_n$ erzeugte $\sigma$-Algebra $\mathcal{F} := \sigma(A_k : k \in \{1, \ldots, n\})$. (3)

**Lösung:** Es gilt $\sigma(A_k : k \in \{1, \ldots, n\}) = \{\cup_{i \in B} A_i : B \subset \{1, \ldots, n\}\}$. Die Inklusion $\supset$ folgt daraus, dass die $A_k$ und damit auch deren Vereinigungen in der erzeugten $\sigma$-Algebra liegen. Für die Inklusion $\subset$ überprüft man direkt, dass die rechte Seite eine $\sigma$-Algebra ist und damit insbesondere größer als die kleinste $\sigma$-Algebra ist, die alle $A_k$ enthält.

(b) Für $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ bestimme die bedingte Erwartung von $f$ bezüglich $\sigma(A_k : k \in \{1, \dots, n\})$. (4)

**Lösung:** Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar bezüglich der von den $A_k$ erzeugten $\sigma$-Algebra, so gilt insbesondere nach dem ersten Teil für jedes $c \in \mathbb{R}$ im Bild von $f$, dass $f^{-1}(\{c\}) \supset A_k$ für ein $1 \leq k \leq n$. Also ist $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \operatorname{span}\{\mathbb{1}_{A_k} : 1 \leq k \leq n\}$. Da die $A_k$ paarweise disjunkt sind, bilden die Indikatoren $(\mathbb{1}_{A_k})_{1 \leq k \leq n}$ eine orthogonale Basis von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Somit ist $(\frac{1}{\sqrt{\mathbb{P}(A_k)}} \mathbb{1}_{A_k})_{1 \leq k \leq n}$ eine Orthonormalbasis. Aus der Vorlesung ist dann bekannt, dass die orthogonale Projektion auf $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h. die bedingte Erwartung $Qf$ von $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ gegeben ist durch

$$Qf = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathbb{P}(A_k)} (f | \mathbb{1}_{A_k}) \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathbb{P}(A_k)} \int_{A_k} f(\omega) \, d\mathbb{P} \; \mathbb{1}_{A_k}.$$

Alternativ kann man auch $Qf$ in der obigen Form raten und direkt die charakterisierende Eigenschaft $\int_B f = \int_B Qf$ für alle $B \in \mathcal{F}$ nachrechnen.

Sei $\mathcal{F}$ eine Unter-$\sigma$-Algebra von $\Sigma$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Operator $Q$, der $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ auf die bedingte Erwartung $Qf$ bezüglich $\mathcal{F}$ abbildet, positiv ist, d.h. aus $f \geq 0$ folgt $Qf \geq 0$.

(c) Zeige oder widerlege: Es gilt $Q(|f|) \leq |Qf|$ für alle $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. (2)

**Lösung:** Die Aussage ist falsch. Wähle $\Omega = \{-1, 1\}$ mit $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathbb{P}(\{-1\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Dann ist für $f(\omega) = \omega$ die bedingte Erwartung bezüglich $\mathcal{F}$ gegeben durch $Qf = 0$, aber $Q(|f|) = 1$.

(d) Zeige oder widerlege: Es gilt $Q(|f|) \geq |Qf|$ für alle $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. (2)

**Lösung:** Die Aussage ist wahr. Aus $f \leq |f|$ folgt $Qf \leq Q(|f|)$ und aus $-f \leq |f|$ folgt $-Qf \leq Q(|f|)$. Somit ist $|Qf| \leq Q(|f|)$.