Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 20.6.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 9

26. *Der Satz von Radon-Nikodym.* Wir benützen in dieser Aufgabe Hilbertraumtheorie um den Satz von Radon-Nikodym zu beweisen:

Seien λ, μ zwei endliche Maße auf einem Messraum (Ω, Σ) mit $\lambda \ll \mu$, d.h. aus $\mu(A) = 0$ folgt $\lambda(A) = 0$. Dann gibt es eine eindeutige nicht-negative messbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(A) = \int_A h \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

(a) Zeige: $\nu = \lambda + \mu$ definiert ein Maß auf (Ω, Σ). (2)

(b) Zeige: Es gibt ein $g \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu)$ mit (4)

$$\int f \, d\lambda = \int fg \, d\lambda + \int fg \, d\mu \quad \forall f \in L^2(\Omega, \Sigma, \nu).$$

Tipp: Verwende den Satz von Riesz-Fréchet.

(c) Zeige: Es ist $g \geq 0$ λ- und μ-fast überall. (3)
Tipp: Wir setzen $N := \{\omega \in \Omega : g(\omega) < 0\}$. Zeige, dass $\lambda(N) = \mu(N) = 0$.

(d) Wir setzen $G := \{\omega \in \Omega : g(\omega) \geq 1\}$. Zeige, dass $\mu(G) = 0$ gilt. (3)

(e) Es sei $M := \{\omega \in \Omega : 0 \leq g(\omega) < 1\}$. Zeige, dass für alle $A \in \Sigma$ (5)

$$\lambda(M \cap A) = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu.$$

Tipp: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $M_n := \{\omega \in \Omega : 0 \leq g(\omega) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$. Zeige zuerst für alle $n \in \mathbb{N}$ die approximative Behauptung

$$\lambda(M_n \cap A) = \int_{A \cap M_n} \frac{g}{1-g} \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma$$

und folgere dann die Behauptung der Aufgabe durch ein Grenzwertargument.

(f) Zeige: Es gilt (1)

$$\lambda(A) = \int_A \frac{g}{1-g} \, d\mu + \lambda(A \cap G) \quad \forall A \in \Sigma.$$

(g) Folgere nun den Satz von Radon-Nikodym in der obigen Formulierung. (2)
Hinweis: Die Eindeutigkeit bitte nicht vergessen!

Bemerkung: Wie in der Maßtheorie getan, kann man nun den Satz von Radon-Nikodym einfach auf σ-endliche Maßräume verallgemeinern.