Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 27.6.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 10

27. *Schwache Konvergenz / Normkonvergenz.* Wir betrachten die Folge $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ in dem reellen Hilbertraum $H = L^2(\mathbb{R})$.

(a) Konvergiert (f_n) schwach in H? (3)

Lösung: Die Folge (f_n) konvergiert in H schwach gegen 0. Denn sei $g \in H$. Dann folgt mit dem Satz von Lebesgue, dass

$$\int_{-\infty}^{N} g^2(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\infty,N]}(x)g^2(x)\,dx \to \|g\|^2 \quad \text{für } N \to \infty.$$

Somit gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\int_{x>n} g^2(x)\,dx \le \epsilon$ für alle $n \ge N_0$. Also ist

$$|(f_n|g)| = \left|\int_n^{n+1} g(x)\,dx\right| \le \left(\int_n^{n+1} |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \left(\int_n^{\infty} |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \epsilon$$

für alle $n \ge N_0$. Somit konvergiert (f_n) schwach gegen 0.

(b) Konvergiert (f_n) in H? (2)

Lösung: Die Folge (f_n) konvergiert nicht in H. Angenommen, dies wäre mit $f_n \to f$ der Fall. Nach der Vorlesung konvergiert dann f_n auch schwach gegen f. Wegen dem ersten Teil und der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts folgt $f = 0$. Aber (f_n) konvergiert offensichtlich nicht gegen 0.

28. *Schwache Abgeschlossenheit.* Eine Teilmenge $M \subset H$ eines Hilbertraums heißt *schwach abgeschlossen*, falls aus $x_n \in M$ mit $x_n \rightharpoonup x$ auch $x \in M$ folgt.

(a) Zeige oder widerlege: Jede normabgeschlossene Menge ist schwach abgeschlossen. (3)

Lösung: Die Aussage ist falsch. Wir betrachten $S \coloneqq \{x \in H : \|x\| = 1\}$ in einem unendlich-dimensionalen separablen Hilbertraum. Wähle eine Orthonormalbasis von H. Dann ist $(e_n) \subset S$ und nach der Vorlesung gilt $e_n \rightharpoonup 0$, aber $0 \notin S$. Somit ist S nicht schwach abgeschlossen.

(b) Zeige oder widerlege: Jede schwach abgeschlossene Menge ist normabgeschlossen. (3)

Lösung: Die Aussage ist wahr. Sei M eine schwach abgeschlossene Teilmenge. Sei $x_n \in M$ mit $x_n \to x \in H$. Dann ist auch $x_n \rightharpoonup x$. Da M schwach abgeschlossen ist, folgt $x \in M$. Damit ist M normabgeschlossen.

29. Sei H ein separabler Hilbertraum.

(a) Zeige: Für alle $x \in H$ gilt $\|x\| = \sup_{\|y\| \le 1}(x|y)$. (3)

Lösung: Für $\|y\| \le 1$ gilt $|(x|y)| \le \|y\|\,\|x\| \le \|x\|$. Zudem gilt für $y = \frac{x}{\|x\|}$ die Gleichung $(x|y) = \|x\|$. Somit ist die Behauptung $\|x\| = \sup_{\|y\| \le 1}(x|y)$ gezeigt.

(b) Sei $x_n \rightharpoonup x$. Zeige: Es ist $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. (4)

Lösung: Für $y \in H$ mit $\|y\| \le 1$ gilt

$$(x|y) = \lim_{n\to\infty} (x_n|y) \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|\,\|y\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Da $\|y\| \leq 1$ in der vorherigen Ungleichung beliebig ist, folgt mit dem vorherigen Aufgabenteil

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} (x|y) \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

(c) Zeige: Ist $x_n \rightharpoonup x$ und $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$, so folgt $x_n \to x$ in H. (1)

Lösung: Es ist mit dem vorherigen Aufgabenteil und den Voraussetzungen

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\| .$$

Somit ist $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Zusammen mit der schwachen Konvergenz aus der Voraussetzung folgt nun mit der Vorlesung, dass $x_n \to x$ in H.

(d) Zeige, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B} = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ schwach abgeschlossen in H ist. (1)

Lösung: Sei $(x_n) \subset \overline{B}$ mit $x_n \rightharpoonup x$. Dann folgt aus Teil (b)

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leq 1.$$

Also folgt $x \in \overline{B}$ und $\overline{B}$ ist schwach abgeschlossen.