UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 4.7.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 11

30. *Abgeschlossene konvexe Mengen sind schwach abgeschlossen.* Sei H ein Hilbertraum und $C \subset H$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge. Zeige: C ist schwach abgeschlossen. (4)

Tipp: Verwende den ersten Trennungssatz.

31. *Summe abgeschlossener Mengen.* Sei H ein Hilbertraum und $A, B \subset H$ konvexe abgeschlossene Teilmengen. Ferner sei B beschränkt.

(a) Zeige: $A + B$ ist abgeschlossen. (3)

(b) Zeige, dass man auf die Beschränktheitsbedingung nicht verzichten kann. Betrachte dazu $H = \ell^2$ und (3)

$$A = \left\{(x_n) \in \ell^2 : x_{2n-1} = n x_{2n}\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(x_n) \in \ell^2 : x_{2n} = 0\right\}.$$

Tipp: Zeige zuerst, dass $A \cap B = \{0\}$ und $A \oplus B$ dicht in ℓ^2 ist.

32. *Die Adjungierte.* Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. T heißt *adjungierbar*, falls es ein $S \in \mathcal{L}(H)$ gibt mit

$$(Tx|y) = (x|Sy) \qquad \text{für alle } x, y \in H.$$

(a) Zeige: Ist T adjungierbar, so ist S eindeutig bestimmt. (1)

Wir bezeichnen in diesem Fall den eindeutigen Operator S mit T^*.

(b) Zeige: Jedes $T \in \mathcal{L}(H)$ ist adjungierbar mit $\|T^*\| \leq \|T\|$. (4)

(c) Es gilt $T^{**} = T$ und $\|T\| = \|T^*\|$. (1)

(d) Sei ferner $S \in \mathcal{L}(H)$. Zeige: $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. (1)

(e) Zeige: Ist $T \in \mathcal{L}(H)$, so ist T auch schwach-schwach stetig, d.h. aus $x_n \rightharpoonup x$ folgt $Tx_n \rightharpoonup Tx$. (3)