Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 11.7.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Lösungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 12

33. *Hermitesche Matrizen.* Sei $H = \mathbb{C}^n$ endlich-dimensional mit dem kanonischen Skalarprodukt und $(T_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Abbildungsmatrix eines Operators $T \in \mathcal{L}(H)$ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{C}^n$. Zeige: T ist genau dann selbstadjungiert, wenn $T_{ij} = \overline{T_{ji}}$ gilt. (2)

Lösung: Wegen der Bilinearität des Skalarprodukts gilt

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \forall\, x, y \in H \iff (Te_i|e_j) = (e_i|Te_j) = \overline{(Te_j|e_i)} \quad \forall\, 1 \le i, j \le n.$$

Die letzte Gleichung ist aber gerade $T_{ji} = \overline{T_{ij}}$.

34. *Multiplikationsoperatoren.* Sei H ein komplexer separabler Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wie in Aufgabe 14 definieren wir für eine beschränkte Folge $m = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den Multiplikationsoperator

$$T_m : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} m_n (x|e_n) e_n.$$

Wir haben bereits gesehen, dass $T_m \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|T_m\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |m_n|$ gilt. Wir werden im folgenden auch T anstatt T_m schreiben, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.

(a) Bestimme die Adjungierte T_m^*. Für welche Folgen $m = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist der Multiplikationsoperator T_m selbstadjungiert? (2)

Lösung: Sei T_m^* oder T^* der zu T_m adjungierte Operator, der nach dem letzten Übungsblatt existiert. Dann ist

$$(T^* e_n|e_m) = \overline{(e_m|T^* e_n)} = \overline{(Te_m|e_n)} = \overline{m_m}(e_n|e_m) = \overline{m_m}\delta_{nm} = \overline{m_n}\delta_{nm} = \overline{m_n}(e_n|e_m)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ gilt also $(T^* e_n - \overline{m_n} e_n | e_m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da die Orthonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ total ist, folgt $(T^* e_n - \overline{m_n} e_n | x) = 0$ für alle $x \in H$. Hieraus folgt $T^* e_n = \overline{m_n} e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Stetigkeit von T^* (siehe wieder letztes Übungsblatt) folgt nun

$$T^* x = T^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n) e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n) T^* e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m_n} (x|e_n) e_n = M_{\overline{m}} x$$

für alle $x \in H$. Wir haben gezeigt, dass $T_m^* = T_{\overline{m}}$ gilt. Also ist T_m genau dann selbstadjungiert, wenn alle Folgenglieder von m reell sind.

(b) Bestimme das Punktspektrum $\sigma_p(T_m)$ von T_m. (2)

Lösung: Wegen $Te_n = m_n e_n$ ist $\{m_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma_p(T_m)$. Ist $\lambda \neq m_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus $(\lambda - T)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - m_n)(x|e_n)e_n = 0$ mit der Parsevalschen Gleichung $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda - m_n|^2 \left|(x|e_n)\right|^2 = 0$ und damit $(x|e_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist aber $x = 0$ und $\lambda - T$ injektiv. Das zeigt, dass wir bereits das gesamte Punktspektrum gefunden haben, es gilt also $\sigma_p(T_m) = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Bestimme das Spektrum $\sigma(T_m)$ von T_m. (2)

Lösung: Wegen der Abgeschlossenheit des Spektrums und $\sigma_p(T_m) \subset \sigma(T_m)$ gilt $\overline{\{m_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(T_m)$. Ist $\lambda \notin \overline{\{m_n : n \in \mathbb{N}\}}$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $|m_n - \lambda| \geq \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt, dass $((\lambda - m_n)^{-1})$ beschränkt ist. Somit definiert

$$R : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - m_n)^{-1}(x|e_n)e_n$$

einen beschränkten linearen Operator auf H. Man sieht, dass $R(\lambda - T) = (\lambda - T)R = \mathrm{I}$ gilt und somit $\lambda - T$ invertierbar ist. Also ist $\lambda \in \varrho(T_m)$ und $\sigma(T_m) = \overline{\{m_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Hinweis: Es darf benutzt werden, dass $\sigma(T_m) \subset \mathbb{C}$ kompakt ist.

(d) Für welche Folgen $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist T_m ein kompakter Operator? (3)

Lösung: Ist T_m kompakt, so folgt aus $e_n \rightharpoonup 0$, dass $m_n e_n = Te_n \to 0$. Somit ist also (m_n) eine Nullfolge. Sei nun umgekehrt $m = (m_n)$ eine Nullfolge, so betrachten wir für $N \in \mathbb{N}$ die Operatoren

$$T_N : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_n \mapsto \sum_{n=1}^{N} m_n(x|e_n)e_n.$$

Diese haben endlich-dimensionales Bild und sind somit kompakt. Nun gilt

$$\|T - T_N\| = \sup_{k \geq N} |m_k| \, ,$$

da $T - T_N$ gerade durch den Multiplikationsoperator T_p mit $p_n = 0$ für $n \leq N$ und $p_n = m_n$ sonst gegeben ist. Da m eine Nullfolge ist, gilt $\sup_{k\geq N} |m_k| \to 0$ für $N \to \infty$. Also gilt $T_N \to T_m$ in $\mathcal{L}(H)$. Da die kompakten Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ abgeschlossen sind, folgt, dass T_m kompakt ist.

35. Wir betrachten auf dem Hilbertraum $L^2(0,1)$ den Operator

$$\begin{aligned} T : L^2(0,1) &\to L^2(0,1) \\ f &\mapsto \left[t \mapsto \int_0^t f(x)\,dx \right]. \end{aligned}$$

(a) Zeige: $T \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$. (1)

Lösung: Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt $|(Tf)(t)| \leq \sqrt{t}\,\|f\|_2$. Also gilt $\|Tf\|_2 \leq \sqrt{2}^{-1}\,\|f\|_2$. Somit ist $T \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ mit $\|T\| \leq \sqrt{2}^{-1}$.

(b) Zeige: $\sigma(T) \neq \emptyset$. (1)

Lösung: Es ist $TL^2(0,1) \subset C[0,1]$ (genauer gesagt besitzt Tf für alle $f \in L^2(0,1)$ einen stetigen Vertreter) nach dem Satz von Lebesgue. Somit ist T nicht surjektiv und damit $0 \in \sigma(T)$.

(c) Zeige: $\sigma_p(T) = \emptyset$, d.h. T besitzt keine Eigenwerte. (3)

Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Angenommen, es gibt ein $f \neq 0$ mit $Tf = \lambda f$. Ausgeschrieben gilt also

$$\int_0^t f(x)\,dx = \lambda f(t) \quad \text{f.ü.}$$

Aus dieser Gleichung folgt insbesondere, dass f stetig und damit induktiv nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralgleichung beliebig oft differenzierbar ist. Deshalb können wir beide Seiten der Gleichung differenzieren und erhalten $f(t) = \lambda f'(t)$. Ist $\lambda = 0$, so folgt $f = 0$ im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $\lambda \neq 0$. Dann erfüllt f das Anfangswertproblem $f'(t) = \lambda^{-1} f(t)$ mit $f(0) = 0$. Die eindeutige Lösung ist $f = 0$, wieder im Widerspruch zur Annahme. Also besitzt T keine Eigenwerte.

36. Sei H ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ kompakt. Zeige: Für $\lambda \neq 0$ ist (4)

$$\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda)) < \infty.$$

Lösung: Sei $\lambda \neq 0$. Angenommen, es gilt $\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda)) = \infty$. $\mathrm{Kern}(T - \lambda)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H und damit ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum. Wähle ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Kern}(T - \lambda)$. Dann ist $e_n \rightharpoonup 0$ und aus der Kompaktheit von T folgt $Te_n = \lambda e_n \to 0$, ein Widerspruch. Also ist $\mathrm{Kern}(T - \lambda)$ endlich-dimensional.

Tipp: Nimm an, dass $\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda)) = \infty$ gilt und führe dies zum Widerspruch (zur Kompaktheit von T).