Universität Ulm

Freitag, 27.7.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 100+32

Klausur Hilberträume & Fouriertransformation

1. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit Fouriertransformierter $\hat{f}$. Für ein $a \in \mathbb{R}$ definieren wir eine neue Funktion $g(t) := f(t-a)$. Zeige, dass $g \in L^1(\mathbb{R})$ und bestimme die Fouriertransformierte $\hat{g}$ von g in Abhängigkeit von $\hat{f}$. (10)

2. Es seien $(E, \|\cdot\|)$ und $(F, \|\cdot\|)$ zwei normierte Räume und $T : E \to F$ linear. Zeige, dass T genau dann stetig ist, wenn es ein $C \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq C \|x\|$ für alle $x \in E$ gibt. (15)

3. Wir betrachten den reellen Hilbertraum $H = \ell^2$.

(a) Zeige, dass die Menge $M := \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : x_1 = x_2\}$ ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^2 ist. (10)

(b) Gebe explizit mit Beweis die orthogonale Projektion P von H auf M an. (10)

4. Wir betrachten den reellen Hilbertraum $H = \ell^2$.

(a) Es gelte $x_n \rightharpoonup x$ in ℓ^2. Zeige, dass dann x_n komponentenweise gegen x konvergiert. (10)

(b) Gilt auch die Umkehrung? Begründe Deine Antwort! (10)

5. Sei H ein komplexer separabler Hilbertraum.

(a) Formuliere eine Version des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte lineare Operatoren aus der Vorlesung. (10)

(b) Sei P ein kompakter selbstadjungierter linearer Operator auf H.
Zeige: P ist genau dann eine Projektion, wenn für das Punktspektrum $\sigma_p(P) \subset \{0, 1\}$ gilt. (15)

6. Finde mit Begründung ein Beispiel für

(a) einen kompakten linearen Operator auf einem Hilbertraum mit unendlichdimensionalem Bild. (7)

(b) einen Prähilbertraum, der kein Hilbertraum ist. (7)

(c) einen Hilbertraum H und einen Unterraum $U \subset H$, der dicht in H ist und $U \neq H$ erfüllt. (7)

(d) einen Hilbertraum H und eine beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H, die nicht schwach konvergiert. (7)

(e) einen Hilbertraum H und einen injektiven Operator $T \in \mathcal{L}(H)$, der nicht invertierbar ist. (7)

(f) einen separablen Hilbertraum H und ein abzählbares Orthonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H, das keine Orthonormalbasis ist. (7)