Universität Ulm

Samstag, 6.10.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 100+37

Lösungen zur Klausur Hilberträume & Fouriertransformation

1. Sei H ein reeller Hilbertraum und $\alpha : H \times H \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.

(a) Zeige, dass die Polarisationsformel

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{4}(\alpha(x + y, x + y) - \alpha(x - y, x - y))$$

für alle $x, y \in H$ gilt. (5)

Lösung: Durch direktes Nachrechnen erhalten wir aus der Symmetrie von α

$$\begin{aligned}\alpha(x + y, x + y) - \alpha(x - y, x - y) &= \alpha(x, x) + \alpha(x, y) + \alpha(y, x) + \alpha(y, y) - \alpha(x, x) \\ &\quad + \alpha(x, y) + \alpha(y, x) - \alpha(y, y) = 4\alpha(x, y).\end{aligned}$$

(b) Seien $T, S \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert mit $(Tx|x) = (Sx|x)$ für alle $x \in H$. Zeige, dass $T = S$ gilt. (10)

Lösung: Wir setzen $\alpha(x, y) \coloneqq ((T - S)x|y)$. Dann ist $\alpha : H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Zudem ist α wegen

$$\alpha(x, y) = ((T-S)x|y) = (x|(T-S)^*y) = (x|(T^*-S^*)y) = (x|(T-S)y) = ((T-S)y|x)$$

für $x, y \in H$ symmetrisch. Nach Voraussetzung gilt $\alpha(x, x) = 0$ für alle $x \in H$ und damit nach Teil (a) $\alpha(x, y) = ((T - S)x|y) = 0$ für alle $x, y \in H$. Insbesondere erhalten wir für $y = (T - S)x$ die Identität $\|(T - S)x\|^2 = 0$, woraus direkt $T = S$ folgt.

2. (a) Formuliere den Satz von Plancherel aus der Theorie der Fouriertransformation. (10)

Lösung: Siehe Vorlesung.

(b) Zeige, dass $A \coloneqq \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}_2(f) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\}$ ein dichter Unterraum von $L^2(\mathbb{R})$ ist. Hierbei bezeichnet $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ die Fourier-Plancherel-Transformation. (10)

Tipp: Zeige zuerst, dass $L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt.

Lösung: Da $L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ein Unterraum und $\mathcal{F}_2$ linear und invertierbar ist, ist A ein Unterraum. Für den Rest der Behauptung zeigen wir zuerst den Tipp. Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ betrachten wir $f_n \coloneqq f\mathbb{1}_{\{|f|\le n\}}$. Dann ist $f_n \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$. Zudem folgt aus $f \in L^2(\mathbb{R})$, dass $|f(x)| < \infty$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Hieraus folgt $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. Aus dem Satz von Lebesgue folgt dann $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$. Für die eigentliche Aufgabe betrachte $f \in L^2(\mathbb{R})$. Da $L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, gibt es $g_n \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ mit $g_n \to \mathcal{F}_2(f)$ in $L^2(\mathbb{R})$. Aus dem Satz von Plancherel folgt nun $\mathcal{F}_2^{-1}g_n \to \mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_2 f = f$. Da $\mathcal{F}_2^{-1}g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in A liegt, ist die Behauptung bewiesen.

3. Wir betrachten in dieser Aufgabe den reellen Hilbertraum $H = \ell^2$ und die Teilmenge $C \coloneqq \{(x_n) \in \ell^2 : 0 \le x_n \le 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige: C ist konvex und abgeschlossen. (5)

Lösung: Die Abgeschlossenheit von C folgt aus der Tatsache, dass Konvergenz in ℓ^2 komponentenweise Konvergenz impliziert und das Intervall $[0, 1]$ abgeschlossen ist.

Genauer: Sei $x_n = (x_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subset C$ mit $x_n \to x$ in ℓ^2. Dann gilt $0 \leq \lim_{n\to\infty} x_n^{(m)} = x^{(m)} \leq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für die Konvexität betrachte $x, y \in C$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann ist

$$0 \leq \lambda x^{(m)} + (1-\lambda) y^{(m)} \leq \lambda + (1-\lambda) \leq 1$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

(b) Bestimme explizit mit Beweis die minimale Projektion P auf C. (10)

Lösung: Wir setzen

$$(Px)_m = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_m \leq 0 \\ x_m & \text{falls } x_m \in (0,1) \\ 1 & \text{falls } x_m \geq 1 \end{cases}.$$

Dann ist offenbar $Px \in C$ (für $Px \in \ell^2$ beachte, dass $|(Px)_m| \leq |x_m|$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt). Wir rechnen nun die charakterisierende Eigenschaft der minimalen Projektion nach. Für $x \in \ell^2$ und $y \in C$ ist

$$\begin{aligned}(Px - x|Px - y) &= \sum_{m:x_m<0} (-x_m)(-y_m) + \sum_{m:x_m>1} (1-x_m)(1-y_m) \\ &= \sum_{m:x_m<0} \underbrace{x_m}_{<0} \underbrace{y_m}_{\geq 0} + \sum_{m:x_m>1} \underbrace{(1-x_m)}_{<0} \underbrace{(1-y_m)}_{\geq 0} \leq 0.\end{aligned}$$

Somit ist P die minimale Projektion auf C.

4. Sei $f \in L^2_{\text{per}}$. Zeige, dass die Folge der Fourierkoeffizienten $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ von f eine Nullfolge bilden. (10)

Lösung: Man weiß aus der Vorlesung, dass die Fourierkoeffizienten $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ einer Funktion $f \in L^2_{\text{per}}$ gerade die Basiskoeffizienten in der Orthonormalentwicklung von f bezüglich der Orthonormalbasis $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ sind. Somit ist $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, also insbesondere gilt $\hat{f}(n) \to 0$ für $n \to \infty$.

5. Wir betrachten auf dem (komplexen) Hilbertraum $H = \ell^2$ den sogenannten Linksshift-Operator $T : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeige, dass $T \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|T\| = 1$ gilt. (5)

Lösung: Für $(x_n) \in \ell^2$ ist

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2.$$

Hieraus folgt $T \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|T\| \leq 1$. Etwa wegen $Te_2 = e_1$ folgt nun $\|T\| = 1$.

(b) Bestimme die Adjungierte $T^* \in \mathcal{L}(H)$. (10)

Lösung: Für die Adjungierte T^* gilt (mit der Konvention $e_0 = 0$)

$$(T^* e_n | e_m) = (e_n | T e_m) = (e_n | e_{m-1}) = \delta_{n,m-1}.$$

Hieraus folgt $T^* e_n = e_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $T^* : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$. In Worten ist also die Adjungierte des Linksshifts T der Rechtsshift T^*.

(c) Zeige, dass $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. (10)

Lösung: Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von T genau, dann wenn es ein $0 \neq x \in H$ mit $Tx = \lambda x$ gibt, also $x_{n+1} = \lambda x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aus dieser Gleichung folgt rekursiv $x_n = \lambda^{n-1} x_1$. Wegen $x \neq 0$ gilt also $x_1 \neq 0$. Für $x_1 \neq 0$ liegt die Folge $(\lambda^{n-1} x_1)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2 genau dann, wenn $|\lambda| < 1$ gilt. Dies zeigt die Behauptung.

(d) Bestimme $\sigma(T)$. (10)

Lösung: Wegen $\|T\| = 1$ folgt mit der Vorlesung $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Da das Spektrum von T aber nach der Vorlesung auch abgeschlossen ist und nach Teil (c) $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = \sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ gilt, folgt $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subset \sigma(T)$. Insgesamt haben wir also $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ gezeigt.

6. Finde mit Begründung ein Beispiel für

(a) einen Hilbertraum H und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit $x_n \rightharpoonup x$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = c$ für ein $c \geq 0$, aber $\|x\| \neq c$; (7)

Lösung: Für eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines (separablen) Hilbertraums H gilt $\|e_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also natürlich auch $\lim_{n\to\infty} \|e_n\| = 1$. Andererseits haben wir aber in der Vorlesung gesehen, dass $e_n \rightharpoonup 0$.

(b) einen Hilbertraum H und einen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ für den es ein $\lambda \in \sigma(T)$ gibt, das kein Eigenwert von T ist; (7)

Lösung: Der Shiftoperator T aus der letzten Aufgabe ist ein solches Beispiel. Man kann etwa $\lambda = 1$ wählen, wie wir nachgerechnet haben.

(c) einen normierten Raum E und ein nicht stetiges lineares Funktional $\varphi : E \to \mathbb{R}$; (7)

Lösung: Wir betrachten den normierten Raum $(C[-1,1], \|\cdot\|_1)$ und die Punktauswertung $\varphi : x \mapsto x(0)$. Diese ist offenbar ein lineares Funktional. Das Funktional φ ist aber nicht stetig, denn für die Dreiecksfunktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + nx & \text{für } x \in [0, -\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}.$$

gilt $\|f_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, aber $1 = \varphi(f_n) \not\to \varphi(0) = 0$.

(d) eine unbeschränkte Folge, die im Cesàro-Sinne konvergiert; (7)

Lösung: Eine Idee für ein Beispiel ist, eine unbeschränkte Folge genügend auszudünnen. Betrachte etwa die Folge

$$x_n = \begin{cases} k & \text{falls } n = 2^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Offenbar ist (x_n) unbeschränkt. Desweiteren ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $2^k \leq n < 2^{k+1}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{1}{2^k}\sum_{m=1}^{k} m = \frac{1}{2^k}\frac{k(k+1)}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Also konvergiert (x_n) im Cesàro-Sinne gegen Null.

(e) einen Hilbertraum H und einen isometrischen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$, der nicht surjektiv ist; (7)

Lösung: Die Adjungierte T^* aus Teil (b) der letzten Aufgabe hat diese Eigenschaft. Aus der Darstellung $T^* : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ folgt sofort, dass T^* isometrisch, aber nicht surjektiv ist.

(f) einen Hilbertraum H und einen Unterraum $U \subset H$ mit $U \neq H$ und $U^\perp = 0$. (7)

Lösung: Wir betrachten auf ℓ^2 den Unterraum $U := \{x \in \ell^2 : \exists N \in \mathbb{N} : x_n = 0 \,\forall n \geq N\}$ der Folgen, die schließlich Null sind. Da insbesondere die Einheitsvektoren e_n in U liegen, folgt für $x \in U^\perp$, dass die n-te Komponente $(x|e_n)$ von x verschwindet. Hieraus folgt $x = 0$ und damit $U^\perp = 0$, obwohl natürlich etwa wegen $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \setminus U$ der Unterraum U eine echte Teilmenge von ℓ^2 ist.