Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013

Abgabe: Donnerstag, 16.5.2013

Punktzahl: 30

Übungen Elemente der Differenzialgleichungen: Blatt 3

Am 9. Mai entfallen die Übungen wegen Christi Himmelfahrt. Dieses Blatt ist deshalb für zwei Wochen Bearbeitungszeit gedacht und somit umfangreicher.

7. *Potenzreihenansatz.* Auch wenn es öfters nicht möglich ist, die Lösung einer Differenzialgleichung in einer geschlossenen Form darzustellen, kann ein sogenannter Potenzreihenansatz noch zu einer relativ expliziten Darstellung der Lösung führen. Wir wollen diese Technik an einem Beispiel kennenlernen. Wir betrachten dazu das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''(t) &= y(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Zeige ohne explizit die Lösung zu bestimmen, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt. (2)

(b) Zeige ohne die Lösung des Anfangswertproblems zu bestimmen, dass die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Problems streng monoton wachsend und konvex auf $[0, \infty)$ ist und einen Wendepunkt in der Null besitzt. (3)

(c) Löse das Anfangswertproblem mit dem Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. (2)

Hinweis: Durch Einsetzen des Ansatzes in die DGL erhältst Du eine Gleichung für λ. Die Lösungen der Gleichung liefern Dir spezielle Lösungen für die Differenzialgleichung. Bestimme nun eine Linearkombination der speziellen Lösungen, die das Anfangswertproblem löst.

(d) Wir nehmen nun an, dass sich die maximale Lösung y lokal um die Anfangszeit $t_0 = 0$ in eine Potzenreihe $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ entwickeln lässt. Zeige, dass die Koeffizienten dann für $k \geq 2$ die rekursive Gleichung $c_k = \frac{c_{k-2}}{k(k-1)}$ erfüllen. (3)

Bemerkung: Nach dem Satz von Cauchy–Kowalevski besitzt eine Gleichung $y'(t) = f(y(t))$ für Funktionen f, die lokal um den Anfangswert in eine Potenzreihe entwickelbar sind, auch lokal eine Lösung, die in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Dies liefert eine theoretische Rechtfertigung für den oberen Ansatz (wenn man die Gleichung in ein System erster Ordnung umschreibt).

(e) Bestimme eine explizite Formel für c_k und stelle die Potenzreihe auf. Zeige, dass man wieder das Ergebnis aus Teil (c) erhält. (2)

8. *Hamiltonsche Systeme.* Es sei $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir versehen $\mathbb{R}^{2n}$ mit den Koordinaten $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. In der Physik interessiert man sich dann für die sogenannten *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_k(t) &= \frac{\partial}{\partial p_k} H(p_1(t), \ldots, q_n(t)) && (k = 1, \ldots, n) \\ \frac{d}{dt} p_k(t) &= -\frac{\partial}{\partial q_k} H(p_1(t), \ldots, q_n(t)) && (k = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu jedem Anfangswertproblem $(p_1(0), \ldots, q_n(0)) = (p_1^0, \ldots, q_n^0) \in \mathbb{R}^{2n}$ eine lokale eindeutige maximale Lösung $(p, q) : I \to \mathbb{R}^{2n}$ ($I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall) besitzen. (1)

(b) Zeige, dass entlang einer Lösung aus Teil (a) der Wert der Hamiltonfunktion konstant bleibt, d.h. (2)

$$H(p_1(t), \dots, q_n(t)) = H(p_1(0), \dots, q_n(0)) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

(c) Nehmen wir nun zusätzlich an, dass $H^{-1}([-M, M])$ für alle $M \geq 0$ beschränkt ist. Zeige, dass dann $I = \mathbb{R}$ gilt, man also globale Lösungen hat. (2)

(d) Wir betrachten nun ein Beispiel. Für $n = 1$ betrachten wir die (normalisierte) Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Bestimme die allgemeine Gestalt der Lösungen der dazugehörigen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. (3)

9. *Grenzgeschwindigkeit eines Autos.* Bei schnell fahrenden Fahrzeugen kann davon ausgegangen werden, dass der Beschleunigung der Luftwiderstand als Kraft $F = -rv^2$ mit einer Konstanten $r > 0$ entgegenwirkt (dabei hängt die Konstante r etwa von dem c_W-Wert des Fahrzeuges ab), wobei v die Geschwindigkeit des Fahrzeuges ist. Wir nehmen zusätzlich an, dass das Fahrzeug eine konstante Antriebskraft $K > 0$ besitzt.

(a) Zeige, dass für die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Fahrzeuges mit der Masse $m > 0$ folgende Differenzialgleichung gilt: (1)

$$\dot{v}(t) = -\frac{r}{m}\left(\sqrt{\frac{K}{r}} - v(t)\right)\left(-\sqrt{\frac{K}{r}} - v(t)\right)$$

Hinweis: Verwende die Newtonschen Gleichungen aus der Physik!

(b) Zeige ohne die Differenzialgleichung zu lösen, dass unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ das Anfangswertproblem eine eindeutige globale Lösung $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt und dass die Geschwindigkeit für $t \to \infty$ gegen $\sqrt{\frac{K}{r}}$ konvergiert. Eine Vervierfachung der Antriebskraft führt also nur zu einer Verdopplung der Maximalgeschwindigkeit. (5)

Hinweis: Orientiere Dich an dem Vorgehen für die logistische Gleichung aus der Vorlesung!

(c) Gebe eine explizite Lösung der Differenzialgleichung unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ an und bestätige damit den Wert der Maximalgeschwindigkeit aus dem vorherigen Teil. (4)