Aufgaben (zum Üben)

A_i diag? Diag. in dem Fall A_i.
Was ist eine Basis von EVen?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Merkblatt: Diagonalisieren und DGL

Wir gehen immer voraus, dass A diag. ist

1. $\dot{y} = Ay$ in Abh. von $y(0) = y_0$ lösen.

$A = XDX^{-1}$ Diag.

$$\Rightarrow y(t) = \exp(tA)y_0 = X \exp(tD) X^{-1} y_0$$

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

$$\exp(tD) = \mathrm{diag}(t\lambda_1, \dots, t\lambda_n)$$

2. Berechne FS für $\dot{y} = Ay$:

$v_1 \dots v_n$ Basis von EVen mit EW $\lambda_1 \dots \lambda_n$ von A.

$\Rightarrow \{e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n\}$ FS. (eventuell komplex!)

3. Berechne <u>reelles</u> FS für $\dot{y} = Ay$: (A <u>reell</u>)

$\lambda_1 \dots \lambda_m$ EW. (verschiedene) von A

(a) <u>λ_i reell</u>:

reelle Vektoren!

Berechne Basis vom ER zu λ_i (Basis $w_1, \dots, w_{l_i}$)

$\Rightarrow$ Ins FS gehört $e^{\lambda_i t} w_1, \dots, e^{\lambda_i t} w_{l_i}$

(b) <u>λ_i ~~reell~~ nicht reell</u>:

nicht reelle Vekt.

Berechne Basis von ER zu λ_i (Basis $w_1 \dots w_{l_i}$)

$\Rightarrow$ Ins FS gehört $\mathrm{Re}(e^{\lambda_i t} w_1) \dots \mathrm{Re}(e^{\lambda_i t} w_{l_i})$

$\mathrm{Im}(e^{\lambda_i t} w_1) \dots \mathrm{Im}(e^{\lambda_i t} w_{l_i})$

$\bar{\lambda}_i$ ist auch ein EW. Der muss nicht mehr betrachtet werden!

Begründungen zu 2.:

$u(t) := e^{\lambda_i t} v_i$

$\dot{u}(t) = \lambda_i e^{\lambda_i t} v_i = e^{\lambda_i t} \lambda_i v_i = e^{\lambda_i t} A v_i = A(e^{\lambda_i t} v_i)$
$= A(u(t))$

$\Rightarrow u$ ist Lösung von DGL $\dot{y} = Ay$.

$\{e^{\lambda_1 t} v_1 \dots e^{\lambda_n t} v_n\}$ FS?:

- Lösung ✓
- genug Lösungen ✓ (n Stück!)
- $t=0$ einsetzen, das ist das Syst. l.u.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ ist l.u., da Basis
(ms Deswegen auch genug)

Begründung zu 3. (b)

$e^{\lambda_i t} w_1 \dots e^{\lambda_i t} w_{l_i}$ l.u. und Lösungen (siehe 2!)

$\Rightarrow e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{w_1} \dots e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{w_{l_i}}$ l.u. und Lösungen (Symmetrie!)

$\Rightarrow Re(e^{\lambda_i t} w_k) = \frac{1}{2}(e^{\lambda_i t} w_k + e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{w_k})$ Lösungen $(k = 1 \dots l_i)$

& $Im(e^{\lambda_i t} w_k) = \frac{1}{2}(e^{\lambda_i t} w_k - e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{w_k})$ Lösungen $(k = 1 \dots l_i)$

& l.u. genauer:

$\{e^{\lambda_i t} w_1 \dots e^{\lambda_i t} w_{l_i}, e^{\overline{\lambda_i t}} \overline{w_1} \dots e^{\overline{\lambda_i}} \overline{w_{l_i}}\}$ erzeugt denselben

UVR der Lösungen wie

$\{Re(e^{\lambda_i t} w_1), \dots, Re(e^{\lambda_i t} w_{l_i}), Im(e^{\lambda_i t} w_1), \dots, Im(e^{\overline{\lambda_i} t} w_{l_i})\}$

Also hat man bei 2. die komp. Lösungen nur durch geeignete komp. durch reelle ersetzt.