Universität Ulm

Samstag, 8.6.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 130+30

Klausur Elemente der Differenzialgleichungen

Es gibt in der Klausur 30 Bonuspunkte. Schwere Aufgaben sind mit einem Stern (*) hinter der Punktzahl gekennzeichnet. Bitte beachtet die Rückseite!

1. Bestimme eine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und das maximale Existenzintervall dieser Lösung (hierfür muss keine Begründung gegeben werden). Zeige oder widerlege jeweils die Eindeutigkeit dieser Lösung.

(a) $y'(t) = 2ty^{-3}(t)$ mit $y(5) = -2$. (10)

(b) $\frac{y^2(t)+2(t+1)y(t)y'(t)}{(t+1)y^2(t)} + \cos t = 0$ mit $y(0) = -1$. (10)

(c) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 8 \sin t$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 3$. (15)

2. Bestimme eine reelle Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und das maximale Existenzintervall dieser Lösung (hierfür muss keine Begründung gegeben werden). Zeige oder widerlege jeweils die Eindeutigkeit dieser reellen Lösung.

Hinweis: Eventuell ist eine Fallunterscheidung nach den Anfangswerten nötig!

(a) $y'(t) = |y(t)|$ mit $y(0) = y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}$. (15)

(b) $y'(t) = 2\sqrt{-y(t)}$ mit $y(0) = y_0$ für $y_0 \leq 0$. (15)

3. Bestimme ein reelles Fundamentalsystem der folgenden Differenzialgleichungssysteme.

(a) (15)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 7y_2 - 3y_3 \\ y_3' &= 10y_2 - 4y_3. \end{aligned}$$

(b) (15)

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_3 \\ y_2' &= 8y_4 - 6y_2 \\ y_3' &= -3y_1 \\ y_4' &= 6y_4 - 4y_2. \end{aligned}$$

4. Sei $A \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$.

(a) Zeige, dass die Menge aller Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des homogenen Problems

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

einen Vektorraum bildet. (15)

(b) Sei $U(t)$ ein Fundamentalsystem von $y'(t) = A(t)y(t)$. Zeige, dass sich für $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y'(t) = A(t)y(t) + g(t)$$

als $U(t)c + y_{\text{par}}(t)$ mit $c \in \mathbb{R}^n$ schreiben lässt, wobei y_{par} eine partikuläre Lösung des oberen inhomogenen Problems ist. (10)

5. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Wir betrachten für $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) & = p(y(t)) \\ y(0) & = y_0. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass das AWP für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige lokale maximale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ besitzt, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ ist. (5)

(b) Nehmen wir des Weiteren an, dass $y_0 > 0$ und $a_k \geq 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$.

(i) Zeige, dass das AWP für $\deg p \leq 1$ eine globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt. (5)

(ii) Zeige, dass aus der Existenz einer globalen Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $\deg p \leq 1$ folgt. (15*)

(c) Kann für die obige Äquivalenz

(i) auf die Voraussetzung $y_0 > 0$ verzichtet werden? (7)

(ii) auf die Voraussetzung $a_k \geq 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$ verzichtet werden? (8)