Universität Ulm

Samstag, 8.6.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 130+30

Lösungen zur Klausur Elemente der Differenzialgleichungen

Es gibt in der Klausur 30 Bonuspunkte. Schwere Aufgaben sind mit einem Stern (*) hinter der Punktzahl gekennzeichnet. Bitte beachtet die Rückseite!

1. Bestimme eine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und das maximale Existenzintervall dieser Lösung (hierfür muss keine Begründung gegeben werden). Zeige oder widerlege jeweils die Eindeutigkeit dieser Lösung.

(a) $y'(t) = 2ty^{-3}(t)$ mit $y(5) = -2$. (10)

Lösung: Sei y eine lokale Lösung. Dann gilt nach Trennen der Veränderlichen $y^3(t)y'(t) = 2t$. Integrieren der Gleichung ergibt

$$y^4(t) - y^4(5) = y^4(t) - 16 = \int_5^t \frac{d}{ds} y^4(s)\, ds = 8 \int_5^t s\, ds = 4t^2 - 100$$

Also ist $y(t) = \pm(4t^2 - 84)^{1/4}$. Aber offensichtlich hat nur der negative Zweig den richtigen Anfangswert, woraus $y(t) = -(4t^2 - 84)^{1/4}$ folgt. Man sieht, dass $f(t, y) = 2ty^{-3}$ in einer Umgebung von (t, y) für $y \neq 0$, also insbesondere um den Anfangswert, stetig differenzierbar ist. Somit besitzt die Gleichung nach dem lokalen EES eine eindeutige lokale Lösung. Diese muss dann schon unser bestimmtes y sein. Aus der Lösung kann man nun noch den maximalen Definitionsbereich $(\sqrt{21}, \infty)$ ablesen.

(b) $\frac{y^2(t)+2(t+1)y(t)y'(t)}{(t+1)y^2(t)} + \cos t = 0$ mit $y(0) = -1$. (10)

Lösung: Durch Umschreiben der Gleichung sieht man, dass es reicht die lineare Gleichung

$$y'(t) = \frac{1}{2}\left(-\cos t - \frac{1}{t+1}\right) y(t).$$

zu lösen. Alternativ kann auch folgender Ansatz gewählt werden.

Wir vermuten, dass es sich um eine exakte Differenzialgleichung handelt. Wir suchen also eine skalarwertige Funktion φ mit

$$\varphi_y(t, y) = \frac{2(t+1)y}{(t+1)y^2} \quad \text{und} \quad \varphi_t(t, y) = \frac{y^2}{(t+1)y^2} + \cos t.$$

Gibt es eine solche Funktion, so folgt durch Integration der ersten Gleichung $\varphi(t, y) = \log((t+1)y^2) + f(t)$ für eine t-abhängige Funktion f. Vergleichen mit der zweiten Gleichung ergibt

$$\frac{y^2}{(t+1)y^2} + f'(t) = \varphi_t(t, y) = \frac{y^2}{(t+1)y^2} + \cos t.$$

Also gilt $f'(t) = \cos t$. Für $f(t) = \sin t$ erhalten wir also die Stammfunktion $\varphi(t, y) = \log((t+1)y^2)) + \sin t$. Also erfüllt $y(t)$ die Differenzialgleichung genau dann, wenn $\varphi(t, y(t)) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt. Einsetzen des Anfangswertes zeigt, dass $c = 0$ gilt. Für eine Lösung des AWPs gilt also notwendigerweise

$$y(t) = \pm\sqrt{\frac{e^{-\sin t}}{t+1}}$$

Damit der Anfangswert erfüllt ist, müssen wir den negativen Zweig wählen. Man sieht, dass die Gleichung lokal um die Anfangsbedingungen äquivalent zu der Gleichung

$$y'(t) = \frac{-y^2(t) - (t+1)y^2(t)\cos t}{2(t+1)y(t)} =: f(t, y(t))$$

ist. Die Funktion f ist aber lokal um $(0, -1)$ stetig differenzierbar. Nach dem lokalen EES besitzt die Gleichung also eine eindeutige lokale Lösung. Nach dem bisher gerechneten muss also unser oben bestimmtes y die Lösung sein. Der maximale Definitionsbereich der Lösung ist $(-1, \infty)$.

(c) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 8\sin t$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 3$. (15)

Lösung: Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine lineare inhomogene Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese besitzen nach der Vorlesung (oder nach dem globalen EES nach Umschreiben in ein System erster Ordnung) eine eindeutige globale Lösung. Nach der Vorlesung ist die allgemeine Lösung der obigen Differenzialgleichung die Summe der allgemeinen homogenen Lösung mit einer partikulären Lösung. Ein Fundamentalsystem für den homogenen Teil bekommt man über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 4\lambda + 5$. Dies sind $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Eine partikuläre Lösung bestimmen wir über den Ansatz $y(t) = A\sin t + B\cos t$. Einsetzen in die Differenzialgleichung ergibt

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = (4B + 4A)\sin t + (4B - 4A)\cos t = 8\sin t.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $B - A = 0$ und $4(B + A) = 8$. Das Gleichungssystem wird von $A = B = 1$ gelöst. Also ist die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y(t) = ae^{2t}\sin t + be^{2t}\cos t + \sin t + \cos t.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt $y(0) = b + 1 = 2$ und $y'(0) = a + 2b + 1 = 3$, woraus man $b = 1$ und $a = 0$ erhält. Also ist

$$y(t) = e^{2t}\cos t + \sin t + \cos t$$

die globale eindeutige Lösung des Problems.

2. Bestimme eine reelle Lösung der folgenden Anfangswertprobleme und das maximale Existenzintervall dieser Lösung (hierfür muss keine Begründung gegeben werden). Zeige oder widerlege jeweils die Eindeutigkeit dieser reellen Lösung.

Hinweis: Eventuell ist eine Fallunterscheidung nach den Anfangswerten nötig!

(a) $y'(t) = |y(t)|$ mit $y(0) = y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}$. (15)

Lösung: Die Gleichung ist von der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $f(y) = |y|$. Die Funktion f erfüllt offensichtlich eine globale Lipschitz-Bedingung. Nach dem globalen EES existiert somit eine globale eindeutige Lösung y der Gleichung. Die Lösung der Gleichung kann durch eine Fallunterscheidung bestimmt werden. Ist $y_0 = 0$, so ist $y(t) = 0$ die eindeutige Lösung ist $y_0 > 0$, so ist $y(t) = y_0 e^t$ die eindeutige Lösung und ist $y_0 < 0$, so ist $y(t) = y_0 e^{-t}$ die eindeutige Lösung.

(b) $y'(t) = 2\sqrt{-y(t)}$ mit $y(0) = y_0$ für $y_0 \leq 0$. (15)

Lösung: Wir stellen zuerst fest, dass $f(t, y) = 2\sqrt{-y}$ nur für nicht-positive Werte von y definiert ist. Deshalb haben wir auch eine Einschränkung an die Anfangswerte. Die Funktion f ist stetig differenzierbar für $y < 0$ und für $y \in (-\infty, -\delta]$ (für ein $\delta > 0$) gilt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{-y}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

Nach dem EES besitzt die Gleichung also eine eindeutige Lösung $y(t)$, solange $y(t) < 0$ gilt. Da jede Lösung monoton steigend ist, bedeutet das insbesondere nach dem globalen EES (man kann die Einschränkung von f auf Intervalle der Form $[-M, -\delta]$ für $M > \delta > 0$ den Voraussetzungen des globalen EES genügend auf ganz $\mathbb{R}$ nach der Vorlesung fortsetzen und dann den Satz anwenden), dass für $y_0 < 0$ eine eindeutige Lösung $y : (-\infty, \epsilon) \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ für ein $\epsilon > 0$ existiert. Berechnen wir diese Lösung: Ist y die Lösung, so gilt nach Trennen der Veränderlichen

$$2\sqrt{-y_0} - 2\sqrt{-y(t)} = -\int_0^t \frac{d}{ds} 2\sqrt{-y(s)}\, ds = \int_0^t \frac{y'(s)}{\sqrt{-y(s)}}\, ds = \int_0^t 2\, ds = 2t.$$

Auflösen nach $y(t)$ ergibt $y(t) = -(\sqrt{-y_0} - t)^2$. Nach der oberen Diskussion muss das dann auch schon die Lösung sein, solange $y(t) < 0$ gilt, also für $t < \sqrt{-y_0}$. Wir können die Lösung jedoch für größere t fortsetzen. Man hat

$$y(t) = \begin{cases} -(\sqrt{-y_0} - t)^2, & t < \sqrt{-y_0} \\ 0, & t \geq \sqrt{-y_0}. \end{cases}$$

Man sieht, dass y stetig differenzierbar ist und die Differenzialgleichung löst. Für $y_0 < 0$ besitzt die Gleichung also eine globale Lösung. Es fehlt jedoch noch die Eindeutigkeit für $y_0 \geq \sqrt{-y_0}$. Man sieht aus der Differenzialgleichung, dass jede Lösung monoton steigend ist. Andererseits kann eine Lösung keine positiven Werte annehmen. Daraus folgt, dass eine Lösung y, die $y(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ erfüllt, auch $y(t) = 0$ für $t \geq t_0$ erfüllt. Hieraus folgt die Eindeutigkeit der oberen Lösung auch für $t \geq \sqrt{-y_0}$.

Für $y_0 = 0$ liegt dagegen eine andere Situtation vor. Hier sind sowohl $y_1(t) = 0$ als auch

$$y_2(t) = \begin{cases} -t^2, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

globale Lösungen des Problems.

3. Bestimme ein reelles Fundamentalsystem der folgenden Differenzialgleichungssysteme.

(a) (15)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 7y_2 - 3y_3 \\ y_3' &= 10y_2 - 4y_3. \end{aligned}$$

Lösung: Die Gleichung ist von der Form $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix}$. Durch scharfes Hinsehen sieht man sofort, dass $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert zum Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Für die beiden anderen Eigenwerte bestimmen wir die Nullstellen von

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -3 \\ 10 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda + 4) + 30 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Wir haben also zusätzlich die Eigenwerte $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Nach einer kurzen Rechnung erhält man die dazugehörigen Eigenvektoren $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Nach der Vorlesung ist also

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 3e^{2t} \\ 0 & 2e^t & 5e^{2t} \end{pmatrix}$$

ein reelles Fundamentalsystem der Gleichung.

(b) (15)

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_3 \\ y_2' &= 8y_4 - 6y_2 \\ y_3' &= -3y_1 \\ y_4' &= 6y_4 - 4y_2. \end{aligned}$$

Lösung: Die Gleichung entkoppelt in zwei Systeme mit jeweils zwei Unbekannten. Diese beiden Gleichungssysteme sind

$$\begin{cases} y_1' &= 3y_3 \\ y_3' &= -3y_1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} y_2' &= 8y_4 - 6y_2 \\ y_4' &= 6y_4 - 4y_2 \end{cases}.$$

Wir können also beide Systeme einzeln lösen. Das erste ist von der Form $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_1 = 3i$ and $\lambda_2 = -3i$. Der Eigenvektor zu $3i$ ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, also ist der Eigenvektor zu $-3i$ gegeben durch $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Das zweite System ist von der Form $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Durch Zusammensetzen der beiden Einzelsysteme erhält man das komplexe Fundamentalsystem

$$V(t) = \begin{pmatrix} e^{3it} & e^{-3it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 2e^{-2t} \\ ie^{3it} & -ie^{-3it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem bekommen wir indem wir die ersten beiden Spalten durch den Real- bzw. Imaginärteil der ersten Spalte von $V(t)$ ersetzen. Dann ist

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 2e^{-2t} \\ -\sin(3t) & \cos(3t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

ein reelles Fundamentalsystem.

4. Sei $A \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n\times n})$.

(a) Zeige, dass die Menge aller Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des homogenen Problems

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

einen Vektorraum bildet. (15)

Lösung: Es reicht zu zeigen, dass die Menge aller Lösungen einen Unterraum des Vektorraums der stetigen Funktionen bilden. Offensichtlich ist $y(t) = 0$ eine Lösung, der Raum ist also nicht leer. Seien desweiteren y_1, y_2 zwei Lösungen des Problems und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ (man kann für $\mathbb{K}$ die reellen oder komplexen Zahlen wählen, darauf soll es uns jetzt nicht ankommen). Dann ist

$$\lambda_1 y_1'(t) + \lambda_2 y_2'(t) = \lambda_1 A(t) y_1(t) + \lambda_2 A(t) y_2(t) = A(t)(\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)).$$

Also ist auch $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ eine Lösung des Problems. Damit ist die Menge aller Lösungen tatsächlich ein Unterraum und damit ein Vektorraum.

(b) Sei $U(t)$ ein Fundamentalsystem von $y'(t) = A(t)y(t)$. Zeige, dass sich für $g \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y'(t) = A(t)y(t) + g(t)$$

als $U(t)c + y_{\text{par}}(t)$ mit $c \in \mathbb{R}^n$ schreiben lässt, wobei y_{par} eine partikuläre Lösung des oberen inhomogenen Problems ist. (10)

Lösung: Man überprüft sofort, dass $U(t)c + y_{\text{par}}(t)$ das inhomogene Problem löst. Es ist also noch zu zeigen, dass jede Lösung des inhomogenen Problems sich in der oberen Form schreiben lässt. Sei also $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des inhomogenen Problems. Dann ist $y - y_{\text{par}}$ wegen

$$y'(t) - y_{\text{par}}'(t) = A(t)y(t) + g(t) - A(t)y_{\text{par}}(t) - g(t) = A(t)(y(t) - y_{\text{par}}(t))$$

eine Lösung des homogenen Problems. Nach der Definition eines Fundamentalsystems bilden dessen Spalten eine Basis des homogenen Problems. Das heißt $y - y_{\text{par}}$ ist eine Linearkombination der Spalten des Fundamentalsystems oder in Formeln $y - y_{\text{par}} = Uc$ für ein $c \in \mathbb{R}^n$. Dann ist aber

$$y(t) = U(t)c + y_{\text{par}}(t),$$

was zu zeigen war.

5. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Wir betrachten für $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) & = p(y(t)) \\ y(0) & = y_0. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass das AWP für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige lokale maximale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ besitzt, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ ist. (5)

Lösung: Die Gleichung ist von der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $f(t,y) = p(y)$. Die Funktion f ist offenbar stetig differenzierbar. Damit besitzt die Gleichung nach dem lokalen EES eine eindeutige maximale Lösung mit den geforderten Eigenschaften.

(b) Nehmen wir des Weiteren an, dass $y_0 > 0$ und $a_k \geq 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$.

(i) Zeige, dass das AWP für $\deg p \leq 1$ eine globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt. (5)

Lösung: Ist $\deg p \leq 1$, so ist $p(x) = ax + b$. Das Polynom p erfüllt dann eine globale Lipschitz-Bedingung. Nach dem globalen EES besitzt dann die Gleichung eine globale Lösung.

(ii) Zeige, dass aus der Existenz einer globalen Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $\deg p \leq 1$ folgt. (15*)

Lösung: Ist umgekehrt $\deg p > 1$, so gilt $p(x) \geq a_k x^k$ für alle $x \geq 0$ und ein $k \geq 2$ mit $a_k > 0$. Ist y dann die Lösung des Anfangswertproblems, so ist $y(0) > 0$ nach Voraussetzung. Die Lösung erfüllt dann für alle $t \geq 0$ in ihrem Definitionsbereich $y'(t) > 0$ und ist damit streng monoton wachsend:

Wäre dies nicht der Fall, gäbe es ein kleinestes $t_0 > 0$ mit $y'(t_0) = 0$. Da aber $y'(t) > 0$ für alle $t \in [0, t_0)$ gilt, würde dies $y(t) \geq y_0$ und damit $y'(t_0) = p(y(t_0)) \geq p(y_0) > 0$ implizieren, ein Widerspruch! Also ist $y(t) > 0$ für alle $t > 0$ im Definitionsbereich und damit nach der oberen Abschätzung $y'(t) \geq a_k y(t)^k$. Dies ist äquivalent zu $\frac{y'(t)}{y(t)^k} \geq a_k$ für alle $t > 0$, da $y(t) > 0$ gilt. Durch Integration erhalten wir

$$\frac{1}{1-k}(y(t)^{-k+1} - y_0^{-k+1}) = \frac{1}{1-k}\int_0^t \frac{d}{ds} y(s)^{-k+1}\, ds = \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)^k}\, ds \geq a_k t.$$

Umgeformt ergibt sich $y(t)^{-k+1} \leq (1-k)a_k t + y_0^{-k+1}$ und damit

$$y(t) \geq \frac{1}{(y_0^{-k+1} - (k-1)a_k t)^{k-1}}.$$

Somit existiert die Lösung höchstens auf dem Intervall $\left(0, \frac{y_0^{1-k}}{(k-1)a_k}\right)$.

(c) Kann für die obige Äquivalenz

(i) auf die Voraussetzung $y_0 > 0$ verzichtet werden? (7)

Lösung: Auf die Voraussetzung kann nicht verzichtet werden. Für ein Polynom p mit $\deg p > 1$ und $a_k \geq 0$ mit $p(0) = 0$ (also $a_0 = 0$), etwa $p(x) = x^2$, löst $y(t) = 0$ für den Anfangswert $y_0 = 0$ die Gleichung.

(ii) auf die Voraussetzung $a_k \geq 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$ verzichtet werden? (8)

Lösung: Auf die Voraussetzung kann nicht verzichtet werden. Betrachte etwa $p(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$. Dann besitzt $y'(t) = p(y(t))$ für $y(0) = 1$ die globale Lösung $y(t) = 1$. Alternativ kann man als Gegenbeispiele auch die logistische Gleichung aus der Vorlesung oder die Differenzialgleichung, die das Geschwindigkeitsprofil eines Autos mit Luftwiderstand beschreibt, aus den Übungen angeben.