Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 30

Lösungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 2

7. *Über Kurven und Wege.* Sind die folgenden Kurven r_1 und r_2 äquivalent, d.h. sind sie zwei Parametrisierungen für denselben Weg?

(a) $r_1(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $r_2(t) = e^{2it}$ für $t \in [0, \pi]$. (2)

Lösung: Wir betrachten $\varphi(t) := 2t$ für $t \in [0, \pi]$. Dann gilt $r_2 = r_1 \circ \varphi$, die Kurven r_1 und r_2 sind also äquivalent.

(b) $r_1(t) = e^{-2\pi it}$ für $t \in [0, 1]$ und $r_2(t) = e^{-2\pi it}$ für $t \in [0, 2]$. (2)

Lösung: Die beiden Kurven sind nicht äquivalent. Denn wären die beiden Kurven äquivalent, so müssten sie nach 8b) dieselbe Länge besitzen. Es gilt aber

$$\ell(r_1) = \int_0^1 \left|-2\pi i e^{2\pi it}\right| \, dt = \int_0^1 2\pi \, dt = 2\pi$$

und analog $\ell(r_2) = 4\pi$ (der Kreis wird zweimal durchlaufen).

8. *Grundlegende Eigenschaften von Kurvenintegralen.* Seien $r_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $r_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ zwei äquivalente stückweise stetig differenzierbare Kurven und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig mit $A \supset r_1([a, b])$. Zeige, dass dann

(a) $\int_a^b f(r_1(t))r_1'(t) \, dt = \int_c^d f(r_2(t))r_2'(t) \, dt$. (2)

Lösung: Nach Voraussetzung gibt eine streng monotone bijektive, stückweise stetig differenzierbare Funktion $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ mit $r_2 = r_1 \circ \varphi$. Wähle eine Partition $c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d$ so, dass auf $[t_i, t_{i+1}]$ für $i = 1, \ldots, n-1$ die Funktionen r_2 und φ stetig differenzierbar sind und auf $\varphi([t_i, t_{i+1}])$ die Funktion r_1 stetig differenzierbar ist. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\int_c^d f(r_2(t))r_2'(t) \, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f((r_1 \circ \varphi)(t))(r_1 \circ \varphi)'(t) \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f((r_1 \circ \varphi)(t))r_1'(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt.\end{aligned}$$

Nach der Substitutionsregel aus Analysis I (genauer teilen wir den Integranden in Real- und Imaginärteil auf und benützen dann separat die Substitutionsregel, dies ist möglich weil φ' eine reelle Funktion ist) gilt

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f((r_1 \circ \varphi)(t))r_1'(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(t_k)}^{\varphi(t_{k+1})} f(r_1(t))r_1'(t) \, dt.$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned}\int_c^d f(r_2(t))r_2'(t) \, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varphi(t_k)}^{\varphi(t_{k+1})} f(r_1(t))r_1'(t) \, dt = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_n)} f(r_1(t))r_1'(t) \, dt \\ &= \int_a^b f(r_1(t))r_1'(t) \, dt.\end{aligned}$$

(b) $\int_a^b |r_1'(t)|\, dt = \int_c^d |r_2'(t)|\, dt$. (2)

Lösung: Wir verzichten der Kürze halber ab dieser Aufgabe darauf, immer eine Partition entlang der Unstetigkeitsstellen der Ableitungen zu betrachten. Die unteren Beweise sind korrekt für stetig differenzierbare Funktionen. Ansonsten muss man sie wie in der Teilaufgabe (a) durch Trennen auf den stetig differenzierbaren Fall zurückführen.

Mit den Bezeichnungen aus Teil a) haben wir

$$\int_c^d \left|r_2'(t)\right|\, dt = \int_c^d \left|r_1'(\varphi(t))\varphi'(t)\right|\, dt = \int_c^d \left|r_1'(\varphi(t))\right| \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \left|r_1'(t)\right|\, dt$$
$$= \int_a^b \left|r_1'(t)\right|\, dt.$$

Dies zeigt, dass die Länge eines Weges und das Kurvenintegral über einen Weg, wie in der Vorlesung eingeführt, wohldefiniert sind, d.h. unabhängig von der Wahl der Parametrisierung des Weges sind.

Seien nun γ_1 und γ_2 zwei Wege, wobei der Endpunkt von γ_1 mit dem Anfangspunkt von γ_2 übereinstimmt und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig ist mit $\operatorname{Bild}\gamma_1 \cup \operatorname{Bild}\gamma_2 \subset A$. Zeige, dass

(c) $\int_{\overline{\gamma_1}} f(z)\, dz = -\int_{\gamma_1} f(z)\, dz$. (2)

Lösung: Ist $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung, so ist $\overline{\gamma}_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\overline{\gamma}_1(t) = \gamma_1(b - t + a)$ eine Parametrisierung des rückwärts durchlaufenen Weges. Nach Definition ist also

$$\int_{\overline{\gamma_1}} f(z)\, dz = \int_a^b f(\overline{\gamma}_1(t))\overline{\gamma_1}'(t)\, dt = -\int_a^b f(\gamma_1(b + a - t))\gamma_1'(b + a - t)\, dt$$
$$= -\int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\, dt = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz,$$

wobei wir in der letzten Zeile gleichzeitig die Substiutionsregel benützt und die Integralgrenzen vertauscht haben.

(d) $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$. (2)

Lösung: Ist $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ (wir können diese Parametrisierung immer durch eine affine Transformation sicherstellen), so ist $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2$ parametrisiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c]. \end{cases}$$

Wir erhalten also direkt aus der Definition

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\, dz = \int_a^c f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt + \int_b^c f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$
$$= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\, dt + \int_b^c f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\, dt = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

9. Berechne folgende Integrale.

(a) $\int_{|z|=2} |z|\, dz$. (3)

Lösung: Es gilt

$$\int_{|z|=2} |z|\, dz = \int_{|z|=2} 2\, dz = 0,$$

da konstante Funktionen eine ganze Stammfunktion besitzen und damit das Integral über den geschlossenen Weg verschwindet.

(b) $\int_{|z|=1} \overline{z}\, dz$. (3)

Lösung: Wegen $z\overline{z} = |z|^2$ gilt

$$\int_{|z|=1} \overline{z}\, dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

nach der Vorlesung.

(c) $\int_{|z|=5} p(z)\, dz$, wobei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten ist. (3)

Lösung: Jedes Polynom besitzt auf der komplexen Ebene eine Stammfunktion. Nach der Vorlesung verschwindet also jedes Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve. Insbesondere gilt also

$$\int_{|z|=5} p(z)\, dz = 0.$$

(d) $\int_{\gamma_E} \frac{1}{z}\, dz$, wobei γ_E einmal den positiv orientierten Rand einer Ellipse E, für die 0 ein innerer Punkt ist, durchläuft. (3)

Lösung:

Wähle einen kleine Kreisscheibe B mit Mittelpunkt 0, die noch ganz in E liegt. Aus der Vorlesung wissen wir bereits (das haben wir direkt nachgerechnet), dass

$$\int_{\partial B} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Teilt man die Ellipse und den Kreis entlang einer Ursprungsgerade, so erhält man zwei Gebiete, deren Ränder durch γ_1 und γ_2 parametrisiert sind. In Umgebungen von beiden Gebieten besitzt $\frac{1}{z}$ jeweils eine (unterschiedliche) Stammfunktion, nämlich einen geeigneten Zweig des Logarithmus (auf geeigneten geschlitzten Ebenen). Somit gilt

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = 0.$$

Mit einer Zeichnung sieht man dann, dass

$$0 = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\gamma_E} \frac{1}{z}\, dz - \int_{\partial B} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\gamma_E} \frac{1}{z}\, dz - 2\pi i.$$

Also ist $\int_{\gamma_E} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$.

Hinweis: $\int_{|z|=r} f(z)\, dz$ ist eine gängige Notation für das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\, dz$, wobei γ einmal den positiv orientierten Rand der Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius r durchläuft. Allgemeiner schreibt man $\int_{\partial G} f(z)\, dz$ für ein positiv berandetes Gebiet G.

10. *Ein nützlicher Trick.* In dieser Aufgabe wollen wir anhand einer Aussage aus der Vorlesung einen nützlichen Trick kennenlernen. Mit diesem kann man Aussagen über komplexe Zahlen manchmal durch geschicktes Drehen in der komplexen Ebene auf Aussagen über reelle zurückführen.

Zeige direkt ohne ein Approximationsargument, dass für eine stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ die Abschätzung (3)

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

gilt. Schätze dazu für $s \in \mathbb{R}$ den Realteil von $e^{is} \int_a^b f(t)\, dt$ ab und drehe dann geschickt auf die reelle Achse, um die Behauptung zu zeigen.

Lösung: Wir machen uns als erstes kurz klar, dass das Integral gerade so definiert wurde, dass es auch linear über den komplexen Zahlen ist. Wegen der $\mathbb{C}$-Linearität des Integrals gilt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(e^{is}\int_a^b f(t)\,dt\right) &= \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{is}f(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{is}f(t))\,dt \\ &\leq \int_a^b \left|e^{is}f(t)\right|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Ist $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, so ist die Behauptung offensichtlich richtig. Ansonsten wähle $s = -\arg\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$. Für diese Wahl gilt

$$e^{is}\int_a^b f(t)\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right|.$$

Also ist

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \operatorname{Re}\left(e^{is}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

11. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Zeige, dass dann f eine Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ besitzt, d.h. eine reell differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Zeige ferner, dass (3)

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Hinweis: Versuche den reellen Fundamentalsatz aus Analysis I für Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ anzuwenden.

Lösung: Aus der Stetigkeit von f folgt, dass auch $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind. Aus Analysis I weiß man, dass $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ reelle Stammfunktionen F_1 und F_2 besitzen. Dann ist aber auch $F := F_1 + iF_2$ reell-differenzierbar mit

$$F' = F_1' + iF_2' = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f = f.$$

Ferner folgt aus dem reellen Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt = F_1(b) - F_1(a) + i(F_2(b) - F_2(a)) \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$