Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 4.7.2013

Jun.-Prof. D. Mugnolo
Stephan Fackler
Sommersemester 2013
Punktzahl: 35+5

Lösungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 3

12. Sei $A_n \subset \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge kompakter nicht-leerer Mengen mit $A_{n+1} \subset A_n$.

(a) Zeige, dass es dann ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. (4)

Lösung: Da A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht leer ist, können wir $z_n \in A_n$ wählen. Da A_1 kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $z_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} z_0$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $n \geq m$ gilt $z_n \in A_n \subset A_m$. Da A_m abgeschlossen ist, folgt daraus auch $z_0 \in A_m$. Somit liegt z_0 in A_m für alle $m \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige, dass die Aussage des obigen Satzes nicht mehr gilt, wenn man nur annimmt, dass die Mengen A_n abgeschlossen sind. (1)

Lösung: Wir wählen $A_n = [n, \infty) \subset \mathbb{R}$. Diese Mengen sind in $\mathbb{C}$ abgeschlossen und erfüllen $A_{n+1} \subset A_n$. Dennoch gilt $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

13. *Über Sterngebiete, Elementargebiete, ...*

(a) Gebe ein Beispiel eines Sterngebiets $G \subset \mathbb{C}$, das nicht konvex ist. (2)

Lösung: Ein geeigneter regulärer Stern liefert ein Gegenbeispiel (eine Skizze ist hier das beste, was man tun kann!). Als Sternzentrum kann man das Zentrum des Sternes wählen, die Strecke zwischen zwei Punkten nahe der Ecken verlässt aber den Stern, weshalb der Stern nicht konvex ist.

(b) Gebe ein Beispiel eines Elementargebiets $G \subset \mathbb{C}$, das kein Sterngebiet ist. (2)

Lösung: Betrachte $G \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \setminus \mathbb{R}_{<0}$ (ein geschlitztes Ananasstück). Das Gebiet G ist kein Sterngebiet, da man zwei (beinahe) gegenüberliegende Punkte nie durch eine Strecke in G verbinden kann. Kleine Teilstücke (der Öffnungswinkel muss klein genug sein) sind aber Sterngebiete und damit Elementargebiete. Diese Teilstücke können mit Hilfe von Lemma 3.12 zu dem Elementargebiet G zusammengesetzt werden.

(c) Sei $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Elementargebieten. Zeige, dass dann $\cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ auch ein Elementargebiet ist. (3)

Bemerkung: Man kann zeigen, dass man alle Elementargebiete ausgehend von Kreisscheiben mit dieser Operation und Vereinigungen wie in Lemma 3.12 konstruieren kann. Zudem kann man zeigen, dass die Elementargebiete gerade die einfach zusammenhängenden Gebiete (wir verweisen auf Vorlesungen oder Bücher über Topologie) sind.

Lösung: Sei $G \coloneqq \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Die Menge G ist als Vereinigung offener Mengen offen. Zudem ist G wegzusammenhängend. Seien dazu z_1 und z_2 in G, d.h. es gibt n_1 und n_2 mit $z_1 \in G_{n_1}$ und $z_2 \in G_{n_2}$. Wähle $n = \max(n_1, n_2)$. Dann gilt $z_1, z_2 \in G_n$. Da G_n wegzusammenhänged ist, gibt es einen Weg in G_n, der z_1 und z_2 verbindet. Dieser Weg liegt dann insbesondere in G. Also ist G offen und wegzusammenhängend und damit ein Gebiet. Um nachzuweisen, dass G ein Elementargebiet ist, reicht es zu zeigen, dass das Wegintegral jeder auf G holomorphen Funktion f über jeden geschlossenen Weg γ in G verschwindet (es würde sogar reichen, dies für Dreieckswege zu prüfen, was den unteren Beweis vereinfachen würde). Bild γ ist als das Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Parametrisierung kompakt. Zudem ist

$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Bild γ. Wegen der Kompaktheit wird Bild γ schon von endlich vielen Gebieten überdeckt. Wählt man davon das größte, sagen wir G_N, so gilt Bild $\gamma \subset G_N$. Da G_N ein Elementargebiet ist, folgt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Also ist G ein Elementargebiet.

14. *Berechnen von Kurvenintegralen mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel.* Berechne folgende Kurvenintegrale.

(a) $\int_{|z-2|=1} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz.$ (3)

Lösung: Der Integrand ist in einer Umgebung von $B_1(2)$ holomorph, da die Nullstellen des Nenners alle Betrag 1 oder 0 haben und von 1 verschieden sind. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt also

$$\int_{|z-2|=1} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz = 0.$$

(b) $\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz.$ (3)

Lösung: Wir berechnen als erstes die Nullstellen von z^4+1. Diese sind $\zeta_{n+1} = \exp(\frac{i(\pi+2\pi n)}{4})$ für $n = 0,\dots,3$. Also haben wir $\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$, $\zeta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$ und $\zeta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Als nächstes finden wir heraus, welche der Nullstellen in dem vom Integrationsweg berandeten Gebiet liegen. Es ist

$$|\zeta_i - 1|^2 = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}\mp 1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3\mp 2\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8\mp 4\sqrt{2}}{4}.$$

Hieraus sieht man, dass genau die Nullstellen 0, ζ_1 und ζ_4 im von der Kurve berandeten Gebiet liegen. Integrieren wir um diese drei Nullstellen um Kugeln mit Radius r für r klein genug, so sind wir in der Situation der Cauchyschen Integralformel und erhalten

$$\int_{|z|=r} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz = 2\pi i \left(\frac{z^7+1}{z^4+1}\right)'\Bigg|_{z=0} = 2\pi i \frac{7z^6(\cdots)+4z^3(\cdots)}{(z^4+1)^2}\Bigg|_{z=0} = 0;$$

$$\begin{aligned}\int_{|z-\zeta_1|=r} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz &= 2\pi i \frac{\zeta_1^7+1}{\zeta_1^2(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_3)(\zeta_1-\zeta_4)} = 4\sqrt{2}\pi i \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)+1}{i2(2+2i)2i} \\ &= 4\pi \frac{(1-i)+\sqrt{2}}{2(2+2i)2i} = 4\pi \frac{(1-i)+\sqrt{2}}{8i(1+i)} = \frac{\pi}{2}\frac{(1-i)+\sqrt{2}}{i-1} \\ &= \frac{\pi}{4}(-2-(1+i)\sqrt{2}) = 2\pi i \frac{2i+(i-1)\sqrt{2}}{8};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{|z-\zeta_4|=r} \frac{z^7+1}{z^2(z^4+1)}\,dz &= 2\pi i \frac{\zeta_4^7+1}{\zeta_4^2(\zeta_4-\zeta_1)(\zeta_4-\zeta_2)(\zeta_4-\zeta_3)} \\ &= 2\pi i \frac{\bar{\zeta_1}^7+1}{\bar{\zeta_1}^2(\bar{\zeta_1}-\bar{\zeta_4})(\bar{\zeta_1}-\bar{\zeta_3})(\bar{\zeta_1}-\bar{\zeta_2})}\end{aligned}$$

Die Summe der drei Integrale ergibt damit

$$4\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{2i+(i-1)\sqrt{2}}{8}\right) = -4\pi i\frac{\sqrt{2}}{8} = -\pi i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Durch das übliche Argument mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes sieht man, dass dies auch der Wert des Kurvenintegrals ist.

(c) $\int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}\, dz.$ (3)

Lösung: Nach der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen gilt

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}(e^{-z})''_{|z=-2} = \pi i e^2.$$

(d) $\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz.$ (3)

Lösung: Die Nullstellen ± 1 liegen beide im innerhalb der Kurve. Mit der Cauchyschen Integralformel sieht man, dass

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz = \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{\cos(\pi z)}{z+1}}{z-1}\, dz = 2\pi i \frac{\cos(\pi)}{2} = -\pi i.$$

Analog ist

$$\int_{|z+1|=1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz = \int_{|z+1|=1} \frac{\frac{\cos(\pi z)}{z-1}}{z+1}\, dz = 2\pi i \frac{\cos(-\pi)}{-2} = \pi i.$$

Durch geschicktes Auftrennen sieht man mit dem üblichen Argument über den Cauchyschen Integralsatz, dass

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz = \int_{|z+1|=1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz + \int_{|z-1|=1} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz = 0.$$

(e) $\int_{|z|=r} \frac{\sin z}{z-b}\, dz$ für $b \in \mathbb{C}, r > 0$ mit $|b| \neq r$. (3)

Lösung: Wir unterscheiden zwei Fälle. Liegt b in $B_r(0)$, so ist mit der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{|z|=r} \frac{\sin z}{z-b}\, dz = 2\pi i \sin b.$$

Ist dagegen $|b| > r$, so ist der Integrand in einer Umgebung von $B_r(0)$ holomorph und es gilt mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{|z|=r} \frac{\sin z}{z-b}\, dz = 0.$$

15. *Funktionentheorie und reelle Integrale.* Funktionentheoretische Methoden helfen oft dabei, Fragestellungen aus der reellen Analysis zu beantworten. Wir wollen hierfür ein erstes Beispiel kennenlernen. Es soll der Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$$

ohne Kenntnis der Stammfunktion ($\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$) berechnet werden.

(a) Für $R > 1$ sei $\gamma_{1,R} = [-R, R]$ und $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$ für $t \in [0, \pi]$. Zeige mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, dass für $\gamma_R \coloneqq \gamma_{1,R} \cup \gamma_{2,R}$ gilt (5)

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \pi.$$

Lösung: Eine Partialbruchzerlegung des Integranden zeigt

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Mit dem üblichen Argument über den Cauchyschen Integralsatz reicht es das Integral über einen kleinen Kreis um den Punkt i zu betrachten ($-i$ liegt außerhalb des von der Kurve berandeten Gebiets). Man hat also

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}\, dz = \frac{1}{2i}2\pi i = \pi.$$

(b) Zeige, dass $\lim_{R\to\infty} \left|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^2}\,dz\right| = 0$ und folgere daraus, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$ gilt. (3)

Lösung: Es gilt für $|z| = R$ die Abschätzung $\left|1+z^2\right| \geq R^2-1$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung. Nach der Fundamentalabschätzung erhält man also für $R > 1$

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Damit folgt

$$\pi = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+z^2}\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}\,dz.$$

16. *Ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.* In dieser Bonusaufgabe wollen wir einen weiteren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geben. Sei P ein nicht konstantes komplexes Polynom

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

von Grad n ($a_n \neq 0$). Zeige, dass P eine komplexe Nullstelle besitzt. Nehme dafür an, dass $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Schreibe $P(z) = zQ(z) + a_0$ und zeige, dass (+5)

$$\frac{1}{z} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{zP(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Leite einen Widerspruch her, indem Du beide Seiten über zunehmend große Ursprungskreise integrierst.

Lösung: Angenommen, $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $P(z) = zQ(z) + a_0$ und $z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{P(z)}{zP(z)} = \frac{zQ(z)+a_0}{zP(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{zP(z)}.$$

Aus der Annahme folgt, dass $\frac{Q}{P}$ eine ganze Funktion ist. Demnach gilt für alle $R > 0$

$$2\pi i = \int_{|z|=R} \frac{1}{z}\,dz = \int_{|z|=R} \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{zP(z)}\,dz = \int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)}\,dz.$$

Zudem gilt für $|z| = R$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$|P(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k = R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,R^k.$$

Insbesondere gibt es ein $R_0 > 0$ so, dass $|P(z)| \geq \frac{1}{2}R^n$ für alle $R > R_0$. Mithilfe der Fundamentalabschätzung folgt nun für $R > R_0$

$$2\pi = \left|\int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)}\,dz\right| \leq 2\pi R \frac{2\,|a_0|}{R\cdot R^n} = \frac{4\pi\,|a_0|}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

da $n \geq 1$. Dies ist aber ein Widerspruch. Also gibt es ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_1) = 0$. Man kann dann P faktorisieren als $P(z) = (z - z_1)P_1(z)$. Falls P_1 noch nicht konstant ist, kann man dasselbe Argument wieder auf P_1 anwenden. Sukzessiv zeigt man so, dass für $c \in \mathbb{C}$ und Nullstellen $z_1, \dots z_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$P(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n).$$

Dies ist gerade der Fundamentalsatz der Algebra!