Funktionentheorie

Delio Mugnolo

Institut für Analysis, Universität Ulm

Sommersemester 2013
Version vom 5. August 2013

Die Konstruktion von $\mathbb{C}$

Theorem 1.1

Es gibt einen (bis auf Isomorphie einzigen) Körper,

- *der eine isomorphe Kopie von $\mathbb{R}$ enthält;*
- *in dem die Gleichung*

$$x^2 = -1$$

  lösbar ist; und
- *der in allen anderen Körper enthalten ist, die obige Eigenschaften auch haben.*

Diesen Körper bezeichnet man mit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Man kann zeigen, dass $x^2 = -1$ zwei Lösungen hat: Eine wird dabei (eigentlich willkürlich) ausgewählt und mit i bezeichnet.

Kurze Geschichte von $\mathbb{C}$

- Komplexe Zahlen wurden 1545 von Gerolamo Cardano erfunden.
- Operationen in $\mathbb{C}$ wurden 1572 von Raffaele Bombelli definiert.
- Wurzeln negativer Zahlen wurden 1637 von René Descartes *imaginär* genannt.
- Leonard Euler führte 1777 die Bezeichnung i ein.
- Carl Friedrich Gauß schlug 1831 die Interpretation $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ vor.

- $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$
- somit: jedes $z \equiv (x, y) =: x + iy$
- $(x + iy) + (w + iz) := (x + w) + i(y + z)$
- $(x + iy) \cdot (w + iz) := (xw - yz) + i(xz + wy)$
- $\overline{x + iy} := x - iy$

Folgerungen:

- $\frac{x+iy}{w+iz} = \left(\frac{xw+yz}{w^2+z^2}\right) + i\left(\frac{yw-xz}{w^2+z^2}\right)$ (z.B.: $\frac{1}{i} = -i$)
- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Der komplexe Betrag

$|x+iy|^2 := |x|^2 + |y|^2$ definiert eine Norm auf $\mathbb{C}$

Für alle $z \in \mathbb{C}$

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- insbesondere $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $|z \cdot w| = |z||w|$
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

- $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}$
- $\cos(z) := \mathrm{Re}\exp(iz)$, $\sin(z) := \mathrm{Im}\exp(iz)$ und somit

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2} \\ \sin x &= \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i} \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

- $\exp(z) = \exp(\mathrm{Re} z)\,(\cos \mathrm{Im} z + i \sin \mathrm{Im} z)$ ("Eulersche Formel")
- $\exp(i0) = 1$
- $\exp(i(x + 2k\pi)) = \exp(ix)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$
- $\exp(z) = \exp(w) \Leftrightarrow z - w = 2\pi ik$ für ein $k \in \mathbb{Z}$
- $|\exp(ix)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\, z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$
- $\Rightarrow \exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$

Polarkoordinaten

- für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\exists_1 \phi =: \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ s.d.

$$z = |z| \exp(i\phi)$$

- $z \cdot w = |z| \exp(i \arg(z)) |w| \exp(i \arg(w)) = |z||w| \exp(i(\arg(z) + \arg(w)))$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$

d.h.: Längen/Beträge werden addiert, Argumente/Winkel multipliziert.

Die Exponentialfunktion

Lemma 1.2

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ mit $z^n = 1$:

$$z_k := \exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right) \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Der Logarithmus

- Eulersche Formel für ein festes $y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} + iy_0 &\to \mathbb{R}_+^* \cdot (\cos y_0 + i \sin y_0) \\ x + iy_0 &\mapsto \exp(x)(\cos y_0 + i \sin y_0) \end{aligned}$$

- Eulersche Formel für ein festes $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exp : x_0 + i\mathbb{R} &\to \partial B_{\exp(x_0)}(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \exp(x_0)\} \\ x_0 + iy &\mapsto \exp(x_0)(\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

- D.h.:
  horizontale Geraden $\to$ offene Halbstrahlen (bijektiv!)
  vertikale Geraden $\to$ Kreise (nicht injektiv da 2π-period., aber surjektiv)

Der Logarithmus

- $\mathsf{Str}_0 := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ wird unter exp nach $\mathbb{C}^*$ bijektiv abgebildet
- $\exp_{|\,\mathsf{Str}_0} : \mathsf{Str}_0 \to \mathbb{C}^*$ ist somit invertierbar

Definition 1.3

Der **Hauptzweig des Logarithmus ist**

$$\log := \exp^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathsf{Str}_0$$

Anmerkung 1.4

- Es gilt

$$\begin{aligned}
&(1.1) \qquad \log(\exp(z)) = z && \text{für alle } z \in \mathrm{Str}_0\\
&(1.2) \qquad \exp(z) = w \;\Rightarrow\; z = \log w + 2\pi i k && \text{für ein } k \in \mathbb{Z}\\
&(1.3) \qquad \exp(\log(w)) = w && \text{für alle } w \in \mathbb{C}^*\\
&(1.4) \qquad \log(w) = \log_{\mathbb{R}}(|w|) + i\arg(w) && \text{für alle } w \in \mathbb{C}^*.
\end{aligned}$$

- Aufgrund der 2π-Periodizität von $\exp(i\cdot) : \mathbb{R} \to \partial B_1(0)$ wird

$$\mathrm{Str}_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : -\pi + \alpha < \operatorname{Im} z \leq \pi + \alpha\}$$

für jedes α bijektiv nach $\mathbb{C}^*$ abgebildet.

Somit: **Es gibt ∞ viele Zweige des Logarithmus.**

Die Potenzfunktion

Definition 1.5

Ist $z \in \mathbb{C}^*$, so kann man $\log z \in \mathrm{Str}_0$ betrachten.
Vorsicht! Hauptzweig von $\log$!
Man definiert für $w \in \mathbb{C}$

$$z^w := \exp(w \log z) \tag{1.5}$$

Anmerkung 1.6

• $w \in \mathbb{Z} \Rightarrow z^w$ ist eindeutig (unabh. vom gewählten Zweig des Logarithmus!) definiert
• $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow z^w$ hängt von der Wahl des Logarithmuszweig ab, da

$$\exp(w \log z) \neq \exp(w(\log z + 2\pi i k)) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

D.h.: man hätte eine unterschiedliche Potenzfunktion definieren können.

- I.A. gilt
$$(xy)^w = x^w y^w \quad \textbf{NICHT},$$
außer $x, y > 0$. Z.B.
$-1 = i \cdot i = (-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} \neq ((-1)(-1))^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$

- Sind $x, y \in (-\pi, \pi)$ mit $x + y > \pi$, so gilt
$x + y - 2\pi \in (-\pi, \pi)$ und daher

$$\begin{aligned}
\log(\exp(ix)\exp(iy)) &= \log(\exp(ix + iy)) \\
&= i(x + y - 2\pi) \\
&\overset{!!!}{\neq} ix + iy \\
&= \log(\exp(ix)) + \log(\exp(iy))
\end{aligned}$$

Die Topologie von $\mathbb{C}$

- Vermöge der Identifikation $x + iy \equiv (x, y)$ liefern die Normen auf $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ bei zugehörigen Elementen gleiche Werte.
- Somit sind die Abstände zwischen $x + iy, z + iw \in \mathbb{C}$ bzw. $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ gleich
- Konvergenzbegriffe und somit Stetigkeit werden genauso wie im normierten Raum $\mathbb{R}^2$ definiert

Stetige Funktionen

Da die Norm auf $\mathbb{C}$ genauso wie die Norm auf $\mathbb{R}^2$ wirkt, ändern sich Topologie und Konvergenzbegriff nicht.

Definition 1.7

Für $A \subset \mathbb{C}$ heißt $f : A \to \mathbb{C}$ an $z_0 \in A$ **stetig, falls**

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Alle üblich Rechenregeln für stetige Funktionen gelten auch im komplexen Fall.

Anmerkung 1.8

$f : A \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ stetig sind.

Dabei sind

$$\operatorname{Re} f : z \mapsto \operatorname{Re}(f(z)), \qquad \operatorname{Im} f : z \mapsto \operatorname{Im}(f(z))$$

Lemma 1.9

(a) $\partial B_1(0) \ni z \mapsto \arg(z) \in \mathbb{C}$ *ist an* $z = -1$ *unstetig.*

(b) *Somit ist der Hauptzweig des Logarithmus an jedem* $z \in \mathbb{R}_-$ *unstetig.*

(c) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \equiv \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi\}$ *wird unter* log *nach* $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ *bijektiv* **und stetig** *abgebildet.*

Beweis. (a) Betrachte

$$a_n := \exp\left(i(\pi - \frac{1}{n})\right), \qquad b_n := \exp\left(i(-\pi + \frac{1}{n})\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$a_n \to -1, \qquad b_n \to -1,$$

aber

$$\arg a_n = \pi - \frac{1}{n} \to \pi, \qquad \arg b_n = -\pi + \frac{1}{n} \to -\pi.$$

(b) Wir wissen schon aus (1.4), dass
$\log(w) = \log_{\mathbb{R}}(|w|) + i\arg(w)$ für alle $w \in \mathbb{C}^*$. □

Komplexe Differenzierbarkeit

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen

Definition 1.10

$f : A \to \mathbb{C}$ heißt **an der Stelle z_0 komplex differenzierbar** *(*$\mathbb{C}$**-diff'bar***), falls*

$$\exists \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

und ggf. heißt dieser Grenzwert **Ableitung** *von f an z_0.*

Ist f an jedem $z_0 \in A$ $\mathbb{C}$-diff'bar,
so heißt f **(auf A) holomorph***, oder manchmal* **analytisch***,*
und man schreibt

$$f \in H(A).$$

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen; $f : A \to \mathbb{C}$; $\alpha \in \mathbb{C}$; $z_0 \in A$

Lemma 1.11

Folgende Eigenschaften sind äquivalent.

(a) *f ist in z_0 $\mathbb{C}$-diff'bar mit $f'(z_0) = \alpha$*

(b) *Es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\phi : A \to \mathbb{C}$ so, dass*

$$f(z) = f(z_0) + \phi(z)(z - z_0) \quad \forall z \in A, \qquad \phi(z_0) = \alpha$$

(c) *Die Funktion*

$$r : A \ni z \mapsto f(z) - f(z_0) - \alpha(z - z_0) \in \mathbb{C}$$

erfüllt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0$$

Korollar 1.12

Jede $\mathbb{C}$-diff'bare Funktion ist stetig.

Beweis vom Lemma 1.11

$(a) \Rightarrow (b)$ Setze

$$\phi(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0, \\ f'(z_0) & z = z_0. \end{cases}$$

$(b) \Rightarrow (c)$

$$\frac{r(z)}{z-z_0} = \phi(z) - \phi(z_0)$$

$(c) \Rightarrow (a)$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{r(z)}{z-z_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \alpha$$

$\square$

Beispiele

- Ist $A \subset \mathbb{R}$, so ist $f : A \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-diff'bar, wenn $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f : A \to \mathbb{R}$ $\mathbb{C}$-diff'bar sind
- Unstetige Funktionen sind nicht $\mathbb{C}$-diff'bar.
- $z \mapsto c$, $c \in \mathbb{C}$; und $z \mapsto z$ sind auf $\mathbb{C}$ holomorph.
- Alle üblich Rechenregeln für differenzierbare Funktionen gelten auch im komplexen Fall: Summe, Produkte und Verkettungen von $\mathbb{C}$-diff'baren Funktionen sind $\mathbb{C}$-diff'bar.
- Somit sind alle Polynome auf $\mathbb{C}$ holomorph.
- (Potenzreihen werden später untersucht)

Fréchet- vs. $\mathbb{C}$-Diff'barkeit

Die Topologine von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind gleich, $\mathbb{R}^2$ ist aber kein Körper.

Somit für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, offen; $z_0 \in A$

Lemma 1.13

Folgende Eigenschaften sind für $f : A \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ äquivalent:

(a) *f ist in z_0 $\mathbb{C}$-diff'bar mit $f'(z_0) = \alpha$*

(b) *f ist in z_0 Fréchet-differenzierbar (d.h.: $\exists A := A_{z_0} \equiv Df(z_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ s. d. $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-A(z-z_0)}{\|z-z_0\|} = 0$) mit Fréchet-Ableitung $A_{z_0} = \alpha \in M_2(\mathbb{R})$*

- Jede komplexe Zahl α kann man als Vektor in $\mathbb{R}^2$ auffassen, aber
- Linearität bzgl. dem Körper $\mathbb{R}$ stellt eine schwächere Bedingung als Linearität bzgl. dem Körper $\mathbb{C}$ dar.
- Assoziiert man mit α die zugehörige lineare Abbildung

$$M_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \ni z \mapsto \alpha z \in \mathbb{C},$$

so identifiziert man $M_{\mathbb{C}}$ mit einer 2×2-Matrix $M_{\mathbb{R}^2}$.
- Ist $M_{\mathbb{R}^2}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linear, so ist $M_{\mathbb{C}}$ nicht immer im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$-linear.
- Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $\mathbb{R}$-linear, aber als Abbildung auf $\mathbb{C}$ aufgefasst, d.h.

$$z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \mapsto (\operatorname{Im} z, \operatorname{Re} z),$$

ist es nicht $\mathbb{C}$-linear (d.h.: $\nexists \beta \in \mathbb{C}$ s.d. $\beta z = \operatorname{Im} z + i \operatorname{Re} z$ [Warum? ÜA])

Lemma 1.14

Für eine Abbildung $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche linear bzgl. $\mathbb{R}$ ist, sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) *M ist im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ linear.*

(ii) *Es gibt $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $Mz \equiv \alpha z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

(iii) *Als Matrix aufgefasst hat M die Form*

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^2$).

Beweis. $(i) \Leftrightarrow (ii)$: trivial
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: $Mz \equiv \alpha z$ für ein $\alpha = a + ib$ und alle $z = x + iy$ bedeutet, dass

$$Mz = \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y \\ m_{21}x + m_{22}y \end{pmatrix} \overset{!}{\equiv} (ax - by, bx + ay).$$

□

Somit für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen; $f : A \to \mathbb{C}$; $\alpha \in \mathbb{C}$; $z_0 \in A$

Theorem 1.15 (A.-L. Cauchy 1814, B. Riemann 1851)

Die folgende Aussagen sind äquivalent.

- *f ist in z_0 $\mathbb{C}$-diff'bar.*
- *f ist in z_0 als Funktion $\mathbb{R}^2 \supset A \to \mathbb{R}^2$ Fréchet-diff'bar und beide* **Cauchy–Riemannschen Differenzialgleichungen**

$$\boxed{\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0), \qquad \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0)}$$

sind erfüllt.
Insbesondere gilt dann

$$f'(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) \equiv \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0)$$

Beweis

- f $\mathbb{C}$-diff'bar $\Rightarrow$ f Fréchet-diff'bar, da $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$
- Ist $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \supset A \to \mathbb{R}^2$ in $z_0 \in \mathbb{R}^2$ Fréchet-diff'bar, dann ist f in z_0 partiell diff'bar und

$$J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

- Somit: Ist $f = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-diff'bar und somit Fréchet-diff'bar, dann gilt

$$f'(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

- Lemma 1.14 $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

□

Unmittelbare Folgerung

Ein $f : A \to \mathbb{C}$, dessen Realteil oder dessen Imaginärteil konstant sind, kann nicht holomorph sein, ohne dass f selber bereits konstant ist.

- Daher ist keine nichtkonstante, $\mathbb{R}$-wertige $\mathbb{R}$-diff'bare Funktion – auch keine *beliebig oft* diff'bare Funktion! – $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, als Funktion $A \to \mathbb{C}$ aufgefasst holomorph.
- Somit: Ist f holomorph, dann ist genau dann f konstant, wenn $\overline{f}$ holomorph ist (Warum? [ÜA])

Beispiele

- exp ist auf $\mathbb{C}$ holomorph, da wegen der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\exp(z) \equiv \operatorname{Re}\exp(x,y) &= \exp(x)\cos y, \\ \operatorname{Im}\exp(z) \equiv \operatorname{Im}\exp(x,y) &= \exp(x)\sin y. \end{aligned}$$

  und somit sind die C.-R.-DGLen offensichtlich erfüllt.
- $f : z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ist auf $\mathbb{C}^*$ holomorph. [ÜA]
- log ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorph. [ÜA]
- für alle $s \in \mathbb{Z}$ kann z^s in einer natürlicher Weise durch $z \cdot \ldots \cdot z$ (s-Mal, wenn $s \geq 0$) oder durch $z^{-1} \cdot \ldots \cdot z^{-1}$ (s-Mal, wenn $s < 0$) definiert werden;
- auch für alle $s \notin \mathbb{Z}$ ist $z \mapsto z^s = \exp(s \log z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ holomorph (Kettenregel!)

Beispiele

- für $f : z \mapsto |z|^2 = (\operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2)$ gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} z_0 & 2 \operatorname{Im} z_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  D.h.: f ist nur in $z_0 = 0$ $\mathbb{C}$-diff'bar
  (Vorsicht! $z \mapsto z^2$ ist auf $\mathbb{C}$ diff'bar).

- $f : z \mapsto \bar{z}$ ist auf $\mathbb{C}$ stetig, aber an keiner Stelle $\mathbb{C}$-diff'bar, denn an jeder Stelle

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \operatorname{id}}{\partial x}(z_0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial(-\operatorname{id})}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0),$$

  d.h., die erste C.-R.-DGL ist nirgendwo erfüllt.

- $f : z \mapsto \operatorname{Re} z$ ist auf $\mathbb{C}$ stetig, aber nirgendwo $\mathbb{C}$-diff'bar. [ÜA]

Da holomorphe Funktionen selten sind, dürften sie hoffentlich sehr gute Eigenschaften haben!

X normierter Raum, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

Definition 1.16

$r \in C([a, b]; X)$ *heißt* **Kurve in X, welche $r(a)$ und $r(b)$ verbindet**.

Definition 1.17

$A \subset X$ *heißt*

- **zusammenhängend**, *falls für je zwei offene Teilmengen O_1, O_2 von X mit $O_i \cap A \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ schon $A \not\subset O_1 \cup O_2$ gilt;*
- **kurvenzusammenhängend**, *falls es für je zwei $x, y \in X$ eine Kurve gibt, der x, y verbindet.*

Beispiel 1.18

Für $A \subset \mathbb{R}$ gilt: A zusammenhängend $\Leftrightarrow$ A Intervall.

Allgemeine:

Zur Erinnerung: Jede Teilmenge Z eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|_X)$ ist selber ein metrischer Raum bzgl. der Metrik

$$d(x,y) := \|x-y\|_X, \qquad x, y \in Z.$$

Dann gilt Folgendes:

Lemma 1.19

Sei Z ein metrischer Raum. Genau dann ist Z zusammenhängend, wenn es keine nichttriviale Teilmengen von Z gibt, die gleichzeitig abgeschlossen und offen sind.

Beweis.
[ÜA] $\square$

X normierter Raum, $A \subset X$

Satz 1.20

Ist A kurvenzusammenhängend, so ist A auch zusammenhängend. Die Umkehrung gilt, wenn A offen ist.

Beweis. $\to$ Topologievorlesung!. □

Beispiel 1.21

Somit: für alle $r, s > 0$ und alle $x, y \in X$ ist

- $B_r(x)$ zusammenhängend;
- Allgemeiner: Konvexität $\Rightarrow$ Kurvenzusammenhang;
- $B_r(x) \cup B_s(y)$ zusammenhängend $\Leftrightarrow B_r(x) \cap B_s(y) \neq \emptyset$;
- Somit: Konvexität $\not\Leftarrow$ Zusammenhang.

Satz 1.22

Es seien $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f : A \to \mathbb{C}$.

Genau dann ist f konstant, wenn f $\mathbb{C}$-diff'bar ist und $f' \equiv 0$.

Beweis. Wende das entsprechende Resultat für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen auf $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : A \to \mathbb{R}$ an. □

Harmonische Funktionen

Es sei $u : A \to \mathbb{R}$: Gibt es $f \in H(A)$ mit $\operatorname{Re} f = u$?

Wenn ja, dann folgt aus diesem Ansatz, aus den C.-R.-DGLen und aus dem Satz von Schwarz, dass (falls man u zwei Mal ableiten kann; wir werden sehen, dass dies immer gilt)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} \\
&\overset{CR1}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} \\
&\overset{S}{=} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \\
&\overset{CR2}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Somit für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen; $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 1.23

Ist $f \in H(A)$ *mit* $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^2(A;\mathbb{R})$, *so erfüllt* $u := \operatorname{Re} f$ *die* **Laplacesche partielle DGL**

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Definition 1.24

Erfüllt eine Funktion u die Laplacesche partielle DGL, so nennt man u **harmonisch**.

(Harmonische Funktionen sind typischerweise mit physikalischen Felder (Gravitationsfeld, Magnetfeld, ...) assoziiert.)

Beispiel: Nicht jede harmonische Funktion ist Realteil einer holomorphen Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto \log(\sqrt{x^2+y^2}) \in \mathbb{R}$$

ist harmonisch [ÜA!].

Aber: Es gibt **kein** $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ mit

$$\operatorname{Re} f(z) \equiv \log(\sqrt{x^2+y^2}) = \log|z|,$$

denn sonst wäre $f(z) = \log z$ bis auf eine Konstante auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ (vgl. (1.4)) und insbesondere besäße der komplexe Logarithmus mit f eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\lightning$

Definition 1.25

$A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt

- *orientierungstreu, falls* $\det A > 0$;
- *winkeltreu, falls*

$$\left(\frac{Ax}{\|Ax\|} \middle| \frac{Ay}{\|Ay\|} \right)_{\mathbb{R}^n} = \left(\frac{x}{\|x\|} \middle| \frac{y}{\|y\|} \right)_{\mathbb{R}^n}$$

wobei: $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ *Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^n$

Bzgl. dem Standardskalarprodukt

Beispiel 1.26

Jedes $A \in O(n)$ ist winkeltreu, aber nicht unbedingt orientierungstreu (z.B.: $A = -\operatorname{Id}$). Jedes $A \in SO(n)$ ist gleichzeitig winkel- *und* orientierungstreu.

Beispiel 1.27

Ist $\det A > 0$ und $\frac{1}{\sqrt{\det A}} A \in O(n)$, so ist A winkeltreu. [ÜA]

Beispiel 1.28

$z \mapsto \bar{z}$ kann man als

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

darstellen (bzgl. der Darstellung komplexer Zahlen in Euklidischen Koordinaten).
Dann ist A winkel-, aber nicht orientierungstreu.

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f : A \to \mathbb{C}$

Von jetzt an stellen wir die $\mathbb{C}$-Ableitung $f'(z_0)$ als 2×2-Matrix dar, d.h.

$$f'(z_0) \equiv J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Definition 1.29

f heißt **konform**, *falls*

- *f holomorph und*
- *$f'(z)$ eine winkel- und orientierungstreue Matrix ist, für alle $z \in A$.*

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 1.30

(1) Ist f holomorph, so ist $\det f'(z_0) \geq 0 \ \forall z_0 \in A$*,*
mit "$=$" $\Leftrightarrow$ $f'(z_0) = 0$.
(2) Ist f holomorph, so ist f konform $\Leftrightarrow$ $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in A$.

Beweis. (1) Ist f holomorph, so gilt in jedem $z_0 \in A$

$$\begin{aligned}\det f'(z_0) &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z)\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) - \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0)\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) \\ &\stackrel{CR}{=} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0)\right)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

(2) "$\Rightarrow$" folgt aus (1).
"$\Leftarrow$" Für jedes $z_0 \in A$ $f'(z_0)^T f'(z_0) = \det f'(z_0) \operatorname{Id}$, d.h.

$$\frac{1}{\sqrt{\det f'(z_0)}} f'(z_0) \in O(2)$$

und somit ist $f'(z_0)$ winkeltreu (Beispiel 1.27). $\square$

Komplexer Satz von der Umkehrabbildung

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ offen, $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 1.31

Sind f holomorph und f' stetig, so gelten folgende Aussagen.

(1) *Gilt in $z_0 \in A$ $f'(z_0) \neq 0$, so gibt es $A_0 \subset A$ offene Umgebung von z_0, so dass $f_{|A_0}$ injektiv ist.*

(2) *Sei f injektiv und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in A$. Dann ist $f(A)$ offen, $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{C}$ ist holomorph und die Ableitung ist durch*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \qquad z \in A,$$

gegeben.

Beweis vom Satz 1.31

(1) Da $f'(z_0) \neq 0$ ist die Jacobi-Matrix invertierbar (Satz 1.30.(1)) und somit folgt die Aussage aus dem Satz von der Umkehrabbildung für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(2) Auch folgt aus dem Satz von der Umkehrabbildung: Ist eine injektive Funktion Fréchet-diff'bar und ist ihre Jacobi-Matrix ein Isomorphismus, so ist ihr Bild offen und ihre Inverse Fréchet-diff'bar. Darüber hinaus gilt $J_{f^{-1}}(f(z)) = (J_f(z))^{-1}$. $\square$

Integral komplexer Funktionen

Integration von Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, ist nur ein Spezialfall der allgemeinen Integrationstheorie für vektorwertige Funktionen: d.h.

- $\int_a^b f(x)\,dx$ ist wohl definiert falls f stetig (oder allgemeiner eine Regelfunktion) ist;
- alternativ, kann man $\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx$ definieren und sich zur Integrationstheorie $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen zurückführen;
- somit gelten die üblichen Rechenregeln und Abschätzungen sowie der Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Die Definition 1.16 von *Kurve* ist unbefriedigend, denn man stellt sich unter einer *Kurve* ihr Bild vor – und zwei verschiedene Kurven können wohl dasselbe Bild haben!

Beispiel 2.1

$r(x) : [0,1] \ni x \mapsto x \in \mathbb{C}$ und
$s(x) : [1,3] \ni x \mapsto \frac{1}{2}(x-1) \in \mathbb{C}$.

Wege

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$

Definition 2.2

- *Eine Kurve* $r : [a, b] \to \mathbb{C}$ *heißt* **stückweise** C^1, *falls es eine endliche Unterteilung* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ *gibt, so dass* $r_{|[t_i, t_{i+1}]} \in C^1([t_i, t_{i+1}]; \mathbb{C})$ *stetig diff'bar ist* $\forall i$.
- *Zwei stückweise* C^1*-Kurven* $r : [a, b] \to \mathbb{C}$ *und* $s : [c, d] \to \mathbb{C}$ *heißen* **äquivalent** *(kurz:* $r \sim s$*), falls es* $\phi : [a, b] \to [c, d]$ *gibt, s.d.*
  - ϕ *ist bijektiv und strikt monoton wachsend;*
  - ϕ *und* ϕ^{-1} *sind stückweise* C^1*;*
  - $r = s \circ \phi$.

Wege (Fortsetzung)

- Jede Äquivalenzklasse $\gamma := [r]_\sim$ heißt **(gerichteter) Weg in** X. Jeder Repräsentant heißt *Parametrisierung* des Weges.
- Gilt $\gamma_{\text{start}} = \gamma_{\text{end}}$ so heißt ein Weg **geschlossen**.

- Sprechen wir von einem Weg γ, so werden wir oft stillschweigend γ mit einem Repräsentanten identifizieren, und somit auch mit seinem Bild: Denn äquivalente Kurven haben gleiche Bilder.
- Jede Parametrisierung eines Wegs ist eine stetige Funktion, die auf einem Kompaktum definiert ist: Somit ist sein Bild auch kompakt.
- Insb. muss ein und somit jeder Repräsentant eines Wegs stückweise C^1 sein!

Wegoperationen

γ^1, γ^2 Wege mit Repräsentanten $r_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ bzw. $r_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ (das ist o.B.d.A. immer möglich, durch Verschieben/Reskalieren)

Definition 2.3

- *Der* **umorientierte Weg** $\bar{\gamma}^2$ *ist durch den Repräsentanten* $r_2 : [0,1] \ni t \mapsto r_2(1-t) \in \mathbb{C}$ *definiert.*
- *Ist* $r_1(1) = r_2(0)$, *d.h.* $\gamma^1_{\mathrm{end}} = \gamma^2_{\mathrm{start}}$, *so ist der* **zusammengesetzte Weg** $\gamma := \gamma^1 \cup \gamma^2$ *definiert durch den Repräsentanten* $s : [0,2] \to \mathbb{C}$,

$$s(t) := \begin{cases} r_1(t) & \textit{falls } t \in [0,1], \\ r_2(t-1) & \textit{falls } t \in [1,2]. \end{cases}$$

- $\bar{\gamma}_2$ ist der Weg, welcher entlang dem Bild von γ_2 verläuft, aber in der entgegengesetzten Richtung.
- Vorsicht! γ_2 und $\bar{\gamma}_2$ sind *nicht* äquivalent.
- Sind γ^1, γ^2 verschiedene Weg mit $\gamma^1_{\mathrm{start}} = \gamma^2_{\mathrm{start}}$, $\gamma^1_{\mathrm{end}} = \gamma^2_{\mathrm{end}}$, so ist $\gamma := \gamma^1 \cup \bar{\gamma}^2$ ein geschlossener Weg.
- Die Wegzusammensetzung ist assoziativ aber i. A. nicht kommutativ!

Wegintegrale

Definition 2.4

Ist γ ein Weg in $\mathbb{C}$ und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig, mit $\mathrm{Bild}(\gamma) \subset A$. Dann ist das **Wegintegral von f entlang γ** *definiert durch*

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(z)\, dz. \tag{2.1}$$

Die **Länge** *von γ ist*

$$\ell(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(z)|\, dz.$$

Anmerkung 2.5

Diese Begriffe hängen nicht von der gewählten Parametrisierung von γ ab, so dass diese Definition überhaupt sinnvoll ist. [Warum? ÜA]

Lemma 2.6

Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg in $\mathbb{C}$ und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig, mit $\mathrm{Bild}(\gamma) \subset A$. Dann gilt

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \sup_{z \in \mathrm{Bild}(\gamma)} |f(z)| \cdot \ell(\gamma).$$

Anmerkung 2.7

γ' braucht nicht überall zu existieren, die Ausnahmepunkte sind jedoch nur endlich viele. Somit ist (2.1) wohl definiert.

Anmerkung 2.8

Ist γ ein Weg im $\mathbb{C}$ mit Repräsentanten $r \equiv \mathrm{id} : x \mapsto x$, so stimmen Weg- und Riemannsches Integral überein. Ähnliches gilt, wenn $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv ist (man nennt γ dann eine *einfache* Kurve). Vorsicht! In $\mathbb{R}$ gibt es keine (nicht triviale) geschlossene einfache Kurven, wohl aber in $\mathbb{C}$!

Beispiel 2.9

Es sei γ die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie $\partial B_r(0)$: Eine Parametrisierung ist

$$\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto r \exp(it) \in \mathbb{C}.$$

Es sei $f(z) := z^m$, für ein $m \in \mathbb{Z}$. $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ist holomorph und somit stetig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^m \, dz &= \int_0^{2\pi} r^m \exp(imt)(ir \exp(it)) \, dt \\
&= ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt \\
&= \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } m = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen; $f : A \to \mathbb{C}$ stetig

Definition 2.10

$F : A \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** *von f, falls F holomorph ist und $F' = f$ gilt.*

Anmerkung 2.11

Vorsicht! Im reellen Fall kann man zeigen, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat.
Obwohl für eine stetige Funktion das Integral definiert ist, ist es *a priori* gar nicht klar, dass derselbe Beweis auch im komplexen Fall funktioniert!
(Wir werden sehen, dass dies tatsächlich *nicht* stimmt.)

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen; $f : A \to \mathbb{C}$ stetig

Satz 2.12 (Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)

Sind F eine Stammfunktion von f und γ ein Weg mit $\mathrm{Bild}(\gamma) \subset A$, so gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma_{\mathrm{end}}) - F(\gamma_{\mathrm{start}}).$$

Beweis. Genauso wie in Analysis 2, durch die Substitutionsregel [Wie geht das? ÜA]

Korollar 2.13

Hat f eine Stammfunktion und ist γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Bild}(\gamma) \subset A$, so gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Korollar 2.14

$\mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ *hat keine Stammfunktion.*

...obwohl diese Funktion holomorph ist!

Beweis. Beispiel 2.9 + Korollar 2.13. $\square$

Definition 2.15

Eine kurvenzusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ heißt **Gebiet**.

Satz 2.16

Ist A ein Gebiet und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

(i) *f hat eine Stammfunktion.*

(ii) *Ist γ ein geschlossener Weg in A, so ist $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*

(iii) *Sind γ_1, γ_2 Wege in A, welche beide $w, z \in A$ verbinden, so ist $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$.*

Beweis vom Satz 2.16 – #1

"$(i) \Rightarrow (ii)$" Korollar 2.13

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" Betrachte den Weg $\gamma := \gamma_1 \cup \bar{\gamma}_2$. Dann gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ aber

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\bar{\gamma}_2} f(z)\ dz = \int_{\gamma_1} f(z)\ dz - \int_{\gamma_2} f(z)\ dz.$$

(Substitutionsregel!)

Beweis vom Satz 2.16 – #2

"(*iii*) ⇒ (*i*)" Es sei $w \in A$ fest gewählt und definiere

$$F(z) := \int_{\gamma(w,z)} f(\zeta)\, d\zeta,$$

wobei $\gamma(w,z)$ ein beliebiger Weg ist, der w mit z verbindet (F ist nach Voraussetzung wohl definiert). Wir werden zeigen, dass F die gesuchte Stammfunktion von f ist.

Es sei $z_0 \in A$ und betrachte eine offene Kugel $A_0 \subset A$ von z_0. Für alle $z \in A_0$ gilt

$$F(z) = \int_{\gamma(w,z)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma(w,z_0)} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma_{(z_0 z)}} f(\zeta)\, d\zeta$$

Beweis vom Satz 2.16 – #3

Nun gilt

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_{\gamma(w,z_0)} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma_{z_0 z}} f(\zeta)\, d\zeta \\
&= F(z_0) + \int_{\gamma_{z_0 z}} f(z_0)\, d\zeta + \int_{\gamma_{z_0 z}} (f(\zeta) - f(z_0))\, d\zeta \\
&= F(z_0) + f(z_0) \int_{\gamma_{z_0 z}} d\zeta + \int_{\gamma_{z_0 z}} (f(\zeta) - f(z_0))\, d\zeta \\
&\overset{(*)}{=} F(z_0) + f(z_0)(z - z_0) + \int_{\gamma_{z_0 z}} (f(\zeta) - f(z_0))\, d\zeta \\
&=: F(z_0) + f(z_0)(z - z_0) + r(z)
\end{aligned}$$

(da der Wert von $\int_{\gamma_{z_0 z}} f(\zeta)\, d\zeta$ vom gewählten Weg unabhängig ist, kann man z.B. die Parametrisierung $[0,1] \ni t \mapsto z_0 + t(z - z_0) \in A_0$ des Geradenabschnittes von z_0 nach z betrachten: daher $(*)$.)

$f \in C(A_0;\mathbb{C}) \Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} \to 0$.

Somit: Lemma 1.11 $\Rightarrow F' = f$. □

Wann verschwinden Wegintegrale entlang geschlossener Weg?

$w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$

Definition 3.1

Die **von** w_1, w_2, w_3 **aufgespannte Dreiecksfläche** $\blacktriangle$ *ist die Menge der Konvexkombinationen von* w_1, w_2, w_3*, d.h.*

$$\blacktriangle_{w_1,w_2,w_3} := \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \sum_{i=1}^{3} t_i w_i \text{ für } t \in \Sigma_3 \right\}.$$

Dabei ist Σ_n das *n*-**Simplex**

$$\Sigma_n := \{t \in \mathbb{R}^n : t_1, \ldots, t_n \geq 0 \text{ und } t_1 + \ldots + t_n = 1\}$$

Sind $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ die Geradenabschnitte mit

- $\gamma^1_{\mathrm{end}} = \gamma^2_{\mathrm{start}} =: w_1$,
- $\gamma^2_{\mathrm{end}} = \gamma^3_{\mathrm{start}} =: w_2$,
- $\gamma^3_{\mathrm{end}} = \gamma^1_{\mathrm{start}} =: w_3$,

so betrachtet man den (geschlossenen) **Dreiecksweg**

$$\gamma_{w_1,w_2,w_3} := \gamma^1 \cup \gamma^2 \cup \gamma^3.$$

Cauchyscher Integralsatz für Dreieckswege

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen; $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 3.2 (E. Goursat 1884)

Ist f holomorph und enthält A eine Dreiecksfläche $\blacktriangle_{w_1,w_2,w_3}$, so gilt

$$\int_{\gamma_{w_1,w_2,w_3}} f(z)\, dz = 0.$$

Im Beweis wird Folgendes verwendet.

Lemma 3.3

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer Teilmengen von X mit A_0 kompakt. Ist A_n abgeschlossen und gilt $A_{n+1} \subset A_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Beweis.

[ÜA] $\square$

Beweis vom Satz 3.2 – #1

(1) Konstruiere rekursiv eine Folge von Dreieckswegen durch sukzessives Unterteilen von Δ_{w_1,w_2,w_3}:

- $\gamma^0 := \gamma_{w_1^{(0)},w_2^{(0)},w_3^{(0)}} := \gamma_{w_1,w_2,w_3}$

  und für $n = 1, 2, \ldots$ ist γ^{n+1} ein unter

- $\gamma_1^{n+1} := \gamma_{\frac{w_1^{(n)}+w_2^{(n)}}{2}, w_2^{(n)}, \frac{w_2^{(n)}+w_3^{(n)}}{2}}$
- $\gamma_2^{n+1} := \gamma_{\frac{w_2^{(n)}+w_3^{(n)}}{2}, w_3^{(n)}, \frac{w_1^{(n)}+w_3^{(n)}}{2}}$
- $\gamma_3^{n+1} := \gamma_{\frac{w_1^{(n)}+w_3^{(n)}}{2}, w_1^{(n)}, \frac{w_1^{(n)}+w_1^{(n)}}{2}}$
- $\gamma_4^{n+1} := \gamma_{\frac{w_1^{(n)}+w_2^{(n)}}{2}, \frac{w_2^{(n)}+w_3^{(n)}}{2}, \frac{w_1^{(n)}+w_3^{(n)}}{2}}$

noch auszuwählender Dreiecksweg ist.

Beweis vom Satz 3.2 – #2

(2) Da

$$\gamma^{(n)} = \gamma_1^{(n)} \cup \gamma_2^{(n)} \cup \gamma_3^{(n)} \cup \gamma_4^{(n)}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\gamma^n} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i^{(n)}} f(z)\, dz$$

Beweis vom Satz 3.2 – #2

(2) Da

$$\gamma^{(n)} = \gamma_1^{(n)} \cup \gamma_2^{(n)} \cup \gamma_3^{(n)} \cup \gamma_4^{(n)}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\gamma^n} \frac{f(z)}{4}\, dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i^{(n)}} \frac{f(z)}{4}\, dz$$

Somit muss es mindestens ein $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$ geben, s.d.

$$\left| \int_{\gamma^{(n)}} \frac{f(z)}{4}\, dz \right| \le \left| \int_{\gamma_{i_0}^{(n)}} f(z)\, dz \right|$$

Man wählt dann

$$\gamma^{(n+1)} := \gamma_{i_0}^{(n)}$$

Beweis vom Satz 3.2 – #3

Da

$$\left|\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\, dz\right| \leq 4 \left|\int_{\gamma^{(n+1)}} f(z)\, dz\right|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gilt aufgrund von $\gamma^{(0)} = \gamma$

$$(*) \qquad \left|\int_{\gamma} f(z)\, dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\, dz\right|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es sei $\blacktriangle_n$ die Dreiecksfläche, deren Rand mit dem Bild von $\gamma^{(n)}$ übereinstimmt.

Beweis vom Satz 3.2 – #4

(3) Jedes $\blacktriangle_n$ ist kompakt und somit gibt es dank Lemma 3.3 ein $z_0 \in \mathbb{C}$, s.d. $z_0 \in \blacktriangle_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f in z_0 $\mathbb{C}$-diff'bar ist, gilt dank Lemma 1.11

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \in \mathbb{C}$$

für ein $r : A \to \mathbb{C}$ so, dass

$$\lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0.$$

Daher gilt

(∗∗)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^{(n)}} f(z)\, dz &= \int_{\gamma^{(n)}} r(z)\, dz \\ &\quad + \int_{\gamma^{(n)}} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\, dz \\ &= \int_{\gamma^{(n)}} r(z)\, dz \end{aligned}$$

nach Lemma 2.16, da $z \mapsto f(z_0) + \alpha(z - z_0)$ eine Stammfunktion hat (Welche? ÜA).

Beweis vom Satz 3.2 – #5

(4) Aus $(*), (**)$ folgt, dass

$$\left|\int_\gamma f(z)\ dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\gamma^{(n)}} r(z)\ dz\right| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es reicht z. z., dass $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n \left|\int_{\gamma^{(n)}} r(z)\ dz\right| = 0.$

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{r(z)}{z-z_0} \overset{z\to z_0}{\to} 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$(***) \qquad |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |r(z)| < \epsilon |z - z_0|.$$

Beweis vom Satz 3.2 – #6

Nimm $N \in \mathbb{N}$ groß genug, so dass $\blacktriangle_N \subset B_\delta(z_0)$. Somit gilt für alle $n \geq N$

$$(****) \quad |z - z_0| \leq \ell(\gamma^{(n)}) \qquad \text{für alle } z \in \blacktriangle_n \subset B_\delta(z_0),$$

da $\blacktriangle_n \subset \blacktriangle_N$.
Es gilt auch

$$(*****) \qquad \ell(\gamma^{(n)}) = \frac{1}{2^n}\ell(\gamma)$$

(denn: Die Seitenlänge von $\gamma^{(n+1)}$ ist die Hälfte der Seitenlänge von $\gamma^{(n)}$).

Beweis vom Satz 3.2 – #7

Zusammengefasst: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}
4^n \left| \int_{\gamma^{(n)}} r(z)\ dz \right| &\leq 4^n \int_{\gamma^{(n)}} |r(z)|\, dz \\
&\overset{(***)}{\leq} 4^n \epsilon \int_{\gamma^{(n)}} |z - z_0| dz \\
&\overset{(****)}{\leq} 4^n \epsilon \ell(\gamma^{(n)}) \int_{\gamma^{(n)}} dz \\
&= 4^n \epsilon \ell(\gamma^{(n)})^2 \\
&\overset{(*****)}{\leq} 4^n \epsilon \frac{\ell(\gamma)^2}{4^n} \\
&= \epsilon \ell(\gamma)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Sterngebiete

$A \subset \mathbb{C}$ offen

Definition 3.4

A heißt **Sterngebiet***, falls* $\exists z_0$ *(“***Mittelpunkt***”) s.d.* $\forall z \in A$*,* $z \neq z_0$*, der Geradenabschnitt (“***Strahl***”) von* z *nach* z_0 *ganz in* A *liegt.*

Anmerkung 3.5

- A ist **konvex**, falls $\forall z_0$ und $\forall z \in A$, $z \neq z_0$, der Geradenabschnitt von z nach z_0 ganz in A liegt.
- Somit ist jedes konvexe A ein Sterngebiet, aber nicht umgekehrt [Gegenbeispiel? ÜA]
- Jedes Sterngebiet ist kurvenzusammenhängend, aber nicht umgekehrt [Gegenbeispiel? ÜA]
- Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist ein Sterngebiet für ein beliebiges $z_0 > 0$.

Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen; $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 3.6

Ist f holomorph und ist A ein Sterngebiet, so hat f eine Stammfunktion.

Anmerkung 3.7

(1) Insbesondere gilt nach dem Satz 2.16

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0,$$

für jeden beliebigen geschlossenen Weg $\gamma \subset A$.

(2) $\mathbb{C}^*$ ist kein Sterngebiet [Warum? ÜA]. Tatsächlich gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0,$$

obwohl $f(z) := z^{-1}$ in $\mathbb{C}^*$ holomorph ist.

Beweis vom Satz 3.6

- Es sei $z_0 \in A$ und $\gamma_{z_0\ z}$ der Geradeabschnitt zwischen z_0 und z.
- Es sei $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(t)\ dt$.
- Betrachte ein weiteres $\tilde{z} \in A$; ein $\delta > 0$ klein genug, so dass $B_\delta(\tilde{z}) \subset A$; und $z \in B_\delta(\tilde{z})$.
- Der Dreiecksweg $\gamma_{z_0,\tilde{z},z}$ ist in A enthalten: Denn nach Definition vom Sterngebiet sind die Strahlen $\gamma_{z_0\tilde{z}}, \gamma_{z_0 z} \subset A$ und somit auch alle Punkte, die auf die Strahlen dazwischen liegen.
- Somit gilt nach dem Satz 3.2 $\int_{\gamma_{z_0,\tilde{z},z}} f(t)\ dt = 0$, d.h.,

$$\int_{\gamma_{\tilde{z}z}} f(t)\ dt = \int_{\gamma_{zz_0}} f(t)\ dt + \int_{\gamma_{z_0\tilde{z}}} f(t)\ dt,$$

  d.h., $\int_{\gamma_{\tilde{z}z}} f(t)\ dt$ hängt nur von den Endpunkte $z, \tilde{z}$ ab.
- Ahme den Beweis vom Satz 2.16, $(iii) \Rightarrow (i)$, ab #3 nach.

$\square$

Korollar 3.8

Für eine beliebige Kurve $\gamma_{1\ z}$ zwischen 1 und z innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ gilt

$$\log(z) = \int_{\gamma_{1\ z}} \frac{1}{\zeta} d\zeta.$$

Beweis.

Für $F(z) := \int_{\gamma_{1\ z}} \frac{1}{\zeta} d\zeta$ gilt $F' = \log'$ und $F(1) = 0 = \log(1)$, und somit ist $F = \log$. $\square$

$A \subset \mathbb{C}$ Sterngebiet mit Mittelpunkt $\tilde{z}$; $f : A \to \mathbb{C}$

Korollar 3.9

Ist f stetig und darüber hinaus an jeder Stelle $z \in A \setminus \{\tilde{z}\}$ $\mathbb{C}$-diff'bar, so hat f eine Stammfunktion.

Beweis – #1

- Es seien $z_0, z \in A$ mit $z \neq \tilde{z} \neq z_0$ und $\blacktriangle_{z,z_0,\tilde{z}} \subset A$.
- Betrachte w entlang $\gamma_{z\,\tilde{z}}$ und w_0 entlang $\gamma_{z_0\,\tilde{z}}$. Nun wird die Dreiecksfläche $\blacktriangle_{z,z_0,\tilde{z}}$ in $\blacktriangle_{w,\tilde{z},w_0}, \blacktriangle_{w,w_0,z_0}, \blacktriangle_{w,z_0,z}$ zerlegt.
- Beachte, dass nur $\blacktriangle_{w,\tilde{z},w_0}$ das Zentrum $\tilde{z}$ von A enthält: Somit gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz für Dreieckswege

$$\int_{\gamma_{w,w_0,z_0}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{w,z_0,z}} f(z)\,dz = 0.$$

- Betrachte die zugehörigen Dreieckswege, gegen den Uhrzeigersinn orientiert...

Beweis – #2

- ...damit
$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{z_0,z,\tilde z}} f(z)\,dz &= \int_{\gamma_{w,\tilde z,w_0}} f(z)\,dz \\ &\qquad + \int_{\gamma_{w,w_0,z_0}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{w,z_0,z}} f(z)\,dz \\ &= \int_{\gamma_{w,\tilde z,w_0}} f(z)\,dz.\end{aligned}$$
- Im Grenzwert für $w \to \tilde z$ und $w_0 \to \tilde z$ erhält man $\int_{\gamma_{z_0,z,\tilde z}} f(z)\,dz = 0$, denn nach Lemma 2.6
$$\left|\int_{\gamma_{w,\tilde z,w_0}} f(z)\,dz\right| \le \sup_{z\in\mathrm{Bild}(\gamma)} |f(z)|\cdot \ell(\gamma_{w,\tilde z,w_0}) \to 0,$$
da Produkt einer Länge, die im Grenzwert verschwindet, und des Supremums einer beschränkter Funktion.
- Ahme jetzt den Beweis vom Satz 2.16 nach.

□

$A \subset \mathbb{R}^d$ offen

Definition 3.10

Ein Gebiet A heißt **Elementargebiet**, *falls jedes holomorphe $f : A \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt, oder äquivalent falls*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für alle holomorphen $f : A \to \mathbb{C}$ und alle in A verlaufende geschlossenen Kurven γ.

Anmerkung 3.11

Jedes Sterngebiet ist ein Elementargebiet.

Lemma 3.12

Es seien A_1, A_2 Elementargebiete, so dass $A_1 \cap A_2$ zusammenhängend und nichtleer ist. Dann ist $A_1 \cup A_2$ ein Elementargebiet.

Beweis.

- Ist $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es Stammfunktionen $F_1 : A_1 \to \mathbb{C}$ und $F_2 : A_2 \to \mathbb{C}$.
- Dann ist $(F_1 - F_2)_{|A_1\cap A_2}$ konstant, da $(F_1 - F_2)'_{|A_1\cap A_2} = {F_1}'_{|A_1\cap A_2} - {F_2}'_{|A_1\cap A_2} = f_{|A_1\cap A_2} - f_{|A_1\cap A_2} \equiv 0$. (Hier verwendet man, dass $A_1 \cap A_2$ zusammenhängend ist.
- Addiere zu $F_{1|A_1\cap A_2}$ eine Konstante derart, dass $(F_1 - F_2)_{|A_1\cap A_2} \equiv 0$, was eine Stammfunktion F von f

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z), & z \in A_1, \\ F_2(z), & z \in A_2, \end{cases}$$

liefert.

□

$r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$

Lemma 3.13

Für alle $a \in B_r(z_0)$ gilt

$$\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i$$

Dabei ist γ die die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie $\partial B_r(z_0)$, d.h.,

$$\gamma(t) := z_0 + r\exp(it), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Beweis – $\#1$

- Ist $z_0 = a$, so wurde die Aussage im Fall $a = 0$ im Beispiel 2.9 bewiesen.
- Ansonsten findet man eine weitere, gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie $\tilde{\gamma}$ (etwa $\tilde{\gamma} = \partial B_{r_0}(a)$), die innerhalb γ verläuft und a umfasst, nicht aber z_0. Man zeigt, dass

$$\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta - a}$$

- Schlitzt man $B_r(z) \setminus B_{r_0}(a)$ entlang der Verbindungslinie zwischen a, z_0, so hat man zwei Elementargebiete A_1, A_2 erhalten.
- Darauf ist $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ holomorph, somit ist

$$\oint_{\partial A_1} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 0 = \oint_{\partial A_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a}.$$

Beweis – #2

- Orientiere die Kurven $\partial A_1, \partial A_2$ gegen den Uhrzeigersinn: Dadurch wird der Schlitz in verschiedenen Richtungen durchlaufen.
- Dadurch kürzen sich die entsprechenden Beiträge:

$$\int_{\partial A_1 \cap \text{Schlitz}} \frac{d\zeta}{\zeta - a} - \int_{\partial A_2 \cap \text{Schlitz}} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 0.$$

- Folglich

$$\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} - \oint_{\tilde\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \oint_{\partial A_1} \frac{d\zeta}{\zeta - a} - \oint_{\partial A_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a}.$$

- Dann gilt

$$2\pi i = \oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \oint_{\tilde\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a}.$$

□

Cauchysche Integralformel

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, offen; $z_0 \in A$; $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph

Theorem 3.14 (A.-L. Cauchy, 1831)

Ist für $r > 0$ $\overline{B_r(z_0)} \subset A$, so gilt für alle $z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei $\gamma \equiv \partial B_r(z_0)$ (wie immer, gegen den Uhrzeigersinn orientiert).

Beweis – #1

- Betrachte $R > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset B_R(z_0) \subset A$, so dass $\gamma \subset B_R(z_0)$ (Kompaktheits komplement).
- Für das gegebene $z \in B_r(z_0)$ setze nun

$$\phi(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z, \\ f'(z) & \zeta = z. \end{cases}$$

Beweis – #2

- Da $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig und außer in z auch holomorph ist, folgt aus Korollar 3.9, dass ϕ eine Stammfunktion hat, oder äquivalent dazu

$$
\begin{aligned}
0 &= \oint_{\partial B_r(z_0)} \phi(\zeta)\, d\zeta \\
&= \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\
&= \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \\
&= \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) 2\pi i.
\end{aligned}
$$

□

Die zentralen Erkenntnisse an der Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

lauten:

- Ist f auf einer Kreisscheibe holomorph, so ist der Wert von f im Zentrum der Kreisscheibe bereits durch die Werte am Rande bestimmt.
- Der Wert in der Mitte stimmt mit einer durch Integration regularisierteren Version überein. Ist f deshalb vielleicht automatisch regulärer?

Die Leibnizsche Regel

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; $A \subset \mathbb{C}$ offen

Lemma 3.15

Es sei $f : [a,b] \times A \to \mathbb{C}$ stetig (kurz: $f = f(t,z)$) und, für jedes $t \in [a,b]$, holomorph in seiner 2. Variable, mit stetiger Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z}$. Betrachte

$$g(z) := \int_a^b f(t,z)\, dt, \qquad z \in A.$$

Dann ist g holomorph und seine Ableitung ist gegeben durch

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\, dt.$$

Beweis.
[ÜA] $\square$

Holomorphe Funktionen sind beliebig oft $\mathbb{C}$-diff'bar

Satz 3.16

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.14 ist f beliebig oft $\mathbb{C}$-diff'bar mit holomorpher Ableitung, und es gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \qquad n \geq 1,\ z \in B_r(z_0).$$

D.h.: Ableitungen holomorpher Funktionen sind selber holomorph!

Beweis.

Durch Induktion: Für $n = 1$ ist dies die die Cauchysche Integralformel. Für $n \geq 2$ folgt dies aus dem Lemma 3.15. $\square$

Der Satz von Morera

$A \subset \mathbb{C}$ offen, $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 3.17 (G. Morera 1886)

Sei f stetig. Es gelte für jeden Dreiecksweg $\gamma_{z_1 z_2 z_3}$ mit $\blacktriangle_{z_1 z_2 z_3} \subset A$

$$\int_{\gamma_{z_1 z_2 z_3}} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Dann ist f holomorph.

Beweis

Es reicht z.z.: Für alle $z_0 \in A$ und $\epsilon > 0$ klein genug, dass $B_\epsilon(z_0) \subset A$, ist $f_{|B_\epsilon(z_0)}$ holomorph.

- Man definiere einen Kandidat für eine Stammfunktion von f durch

$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$

  ($\gamma \equiv$ Geradeabschnitt von z_0 nach z).
- Voraussetzungen $\Rightarrow 0 = \int_{\mathring{\gamma}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta)\, d\zeta$.
- Somit hat f eine Stammfunktion, welche notwendigerweise (s. Beweis vom Lemma 2.16) F ist.
- D.h.: $F' = f$. Laut Satz 3.16 ist somit f holomorph.

Definition 3.18

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt f **ganz**.

Beispiel 3.19

Konstante Funktionen oder, allgemeiner, Polynome sind ganz.

Satz 3.20 (J. Liouville 1847)

Ist eine ganze Funktion beschränkt, so ist sie bereits konstant.

Beweis von Satz 3.20

- Es sei $z \in \mathbb{C}$. Satz 3.16 $\Rightarrow$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\zeta.$$

für $\gamma = \partial B_r(z)$, für $r > 0$ beliebig.

- Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \left| \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} \right| d\zeta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \ell(\gamma) \|f\|_\infty \frac{1}{r^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Folgerung: Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz 3.21

Ist P ein Polynom von Grad $n \geq 1$, so hat P mindestens eine Nullstelle.

Anmerkung 3.22

Es ist wesentlich, dass P ein *komplexes* Polynom ist; denn in $\mathbb{R}$ hat z.B. $x \mapsto x^2 + 1$ wohl keine Nullstelle.

Korollar 3.23

Ist P ein Polynom von Grad $n \geq 1$, so hat P genau n (sich möglicherweise wiederholende) Nullstellen.

Beweis.

- Es sei z_1 die bereits gefundene Nullstelle. Dann faktorisiert man
$$P(z) = (z_1 - z)Q(z), \qquad z \in \mathbb{C},$$
wobei Q Grad $n-1$ hat.
- Rekursion!

$\square$

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

- P ist ganz, aber auch unbeschränkt: $\forall M > 0\ \exists R > 0$ s.d.

  $$|P(z)| \geq M \qquad \forall |z| > R,$$

  d.h., $|P(z)^{-1}| \leq M$ auf $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$.
- Hätte P keine Nullstelle, so gilt auch $|P(z)^{-1}| \leq \tilde{M}$ auf $B_R(0)$, für ein gewisses $\tilde{M}$.
- Insgesamt wäre P beschränkt: somit Liouville $\Rightarrow$ P wäre konstant $\lightning$
- $\Rightarrow$ P hat doch mindestens eine Nullstelle.

$\square$

Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen

$A \subset \mathbb{C}$; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolge mit $f_n : A \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $f : A \to \mathbb{C}$

Definition 4.1

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* **gegen f gleichmäßig konvergent**, *falls* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *bzgl. der* $\|\cdot\|_\infty$*-Norm, d.h., falls*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon.$$

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* **gegen f lokal gleichmäßig konvergent**, *wenn es zu jedem $z_0 \in A$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass* $\left(f_{n|B_\epsilon(z_0)\cap A}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $f_{|B_\epsilon(z_0)\cap A}$ *gleichmäßig konvergiert.*

Kanonisches Gegenbeispiel

- Sei $f_n : B_1(0) \to \mathbb{C}$ durch
$$f_n(z) := z^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$
definiert.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist lokal gleichmäßig, nicht aber gleichmäßig gegen 0 konvergent.

Lemma 4.2

(1) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* f *lokal gleichmäßig, so konvergiert* $(f_{n|K})_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen* $f_{|K}$ *für alle Kompakta* $K \subset A$.

(2) Es sei nun A *offen. Konvergiert* $(f_{n|K})_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $f_{|K}$ *für alle Kompakta* $K \subset A$, *so konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* f *lokal gleichmäßig.*

Beweis vom Lemma 4.2 – #1

Lokal glm'e Konvergenz $\Rightarrow$ Glm'e Konvergenz auf Kompakta

- Es sei $K \subset A$ kompakt und betrachte zu jedem $z_0 \in K$ die Menge $B_\epsilon(z_0)$, die in der Definition von lokaler glm. Konvergenz eingeführt wird.
- Von der offenen Überdeckung $(B_\epsilon(z_0))_{z_0 \in K}$ kann man eine endliche Teilüberdeckung $(B_\epsilon(z_k))_{1 \le k \le n}$ auswählen.
- Es sei $\epsilon > 0$. So gibt es $N_k \in \mathbb{N}$ mit $\|f_{n_{|B_\epsilon(z_k)}} - f_{|B_\epsilon(z_k)}\|_\infty \le \epsilon$ für alle $n \ge N_k$, und das für alle $k = 1, \dots, n$.
- Betrachte nun $N := \max\limits_{1 \le k \le n} N_k$: dann gilt $\|f_{n_{|B_\epsilon(z_k)}} - f_{|B_\epsilon(z_k)}\|_\infty \le \epsilon$ für alle $n \ge N$ und alle k.
- Das bedeutet: $\|f_{n_{|K}} - f_{|K}\|_\infty \le \epsilon$, d.h., $(f_{n|K})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f_{|K}$.

Beweis vom Lemma 4.2 – #2

Lokal glm'e Konvergenz $\Leftarrow$ Glm'e Konvergenz auf Kompakta

- Ist $z_0 \in A$, so gibt es $B_\epsilon(z_0) \subset A$ (da A offen) und somit $K := \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}(z_0)} \subset A$.
- Nach Voraussetzung: $(f_{n|K})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f_{|K}$ gleichmäßig.
- Insbesondere: $(f_{n|B_{\frac{\epsilon}{2}}(z_0)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f_{|B_{\frac{\epsilon}{2}}(z_0)}$ gleichmäßig.

$\square$

Zur Erinnerung: Stetigkeit auf $\mathbb{C} \equiv$ Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2$

Schon in Ana2 gelernt:

Satz 4.3

Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f und sind alle f_n stetig, so ist f stetig.

Korollar 4.4

Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f und sind alle f_n stetig, so ist f stetig.

Beweis.

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft: sie kann durch das Verhalten von f in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punkts charakterisiert werden. $\square$

Folgen von Integralen

$A \subset \mathbb{C}$; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : A \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 4.5

Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f und sind alle f_n stetig, so gilt für jeden Weg $\gamma \subset A$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Beweis.

- Die Bilder der Wege γ sind kompakt.
- Lemma 4.2 $\Rightarrow (f_{n|\gamma})_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent.
- Es gilt

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz \right| \le \ell(\gamma) \left\| f_{n|\gamma} - f_{|\gamma} \right\|_\infty (\gamma) \to 0.$$

□

Folgen holomorpher Funktionen

$A \subset \mathbb{C}$ offen; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolge mit $f_n : A \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 4.6

Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f und sind alle f_n holomorph, so ist auch f holomorph und

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f'.$$

Anmerkung 4.7

Vorsicht! Im reellen Fall liegt die (im Komplexen noch viel kleinere als $H(A)$!) Menge der Polynome in $C(A;\mathbb{R})$ dicht (vgl. Satz von Stone-Weierstraß).

Beweis vom Satz 4.6

- Lemma 4.2 $\Rightarrow (f_{n|K})_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent für alle Kompakta $K \subset A$.
- Insbesondere ist $(f_{n|\gamma_{w_1,w_2,w_3}})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent für alle Dreieckswege $\gamma_{w_1,w_2,w_3} \subset K$, notwendigerweise gegen $f_{|\gamma_{w_1,w_2,w_3}}$.
- $f_{n|\gamma_{w_1,w_2,w_3}}$ hat eine Stammfunktion weil holomorph: Korollar 2.13 $\Rightarrow \int_{\gamma_{w_1,w_2,w_3}} f_n(z)\, dz = 0$.
- Satz 4.5 $\Rightarrow \int_{\gamma_{w_1,w_2,w_3}} f(z)\, dz = 0$.
- Satz von Morera $\Rightarrow f$ ist holomorph.
- Cauchysche Integralformel $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n' = f'$.

$\square$

Konvergenzbegriffe für Funktionenreihen

$A \subset \mathbb{C}$; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolge mit $f_n : A \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $f : A \to \mathbb{C}$

Definition 4.8

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *heißt* **konvergent in Norm**, *falls* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ *konvergiert.*
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *heißt* **normal konvergent**, *falls es zu jedem* $z \in A$ *eine Umgebung* $U(z)$ *existiert, so dass* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_{n_{|U(z)\cap A}}\|_\infty$ *konvergiert.*
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *heißt gegen* F **gleichmäßig konvergent**, *falls* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* F *gleichmäßig konvergiert, wobei*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *heißt gegen* F **lokal gleichmäßig konvergent**, *falls* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* F *lokal gleichmäßig konvergiert.*

- Normale Konvergenz $\Leftarrow$ Konvergenz in Norm $\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz
- Normale Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ $\Rightarrow$ lokal gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$

$A \subset \mathbb{C}$ offen; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolge mit $f_n : A \to \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 4.9

Es sei $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ normal konvergent, etwa gegen F. Ist jedes f_n holomorph, so ist auch F holomorph und $F' = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ (normale Konvergenz).

Beweis vom Satz 4.9

- Zur Holomorphie von F: Wende Satz 4.6 auf die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.
- Zur normalen Konvergenz: Es sei $z \in A$. Nimm $\epsilon > 0$ klein genug, dass $B_\epsilon(z) \subset A$ und auch so klein, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_{n_{|B_\epsilon(z)\cap A}}\|_\infty$ konvergiert.
- Dann gilt für alle $w \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)$ (Cauchysche Integralformel!)

$$|f_n'(w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\epsilon(z)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - w)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{\epsilon} \|f_{n_{|B_\epsilon(z)\cap A}}\|_\infty$$

- Somit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n'(w)| \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_{n_{|B_\epsilon(z)\cap A}}\|_\infty < \infty.$$

□

Fundamentales Beispiel

Zur Erinnerung: Für $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$

$$n^s := \exp(s \log n).$$

Satz 4.10

Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|n^s|}$ *konvergiert gleichmäßig in* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta\}$ *für alle* $\delta > 0$.

Beweis.

Da $|n^s| = n^{\operatorname{Re} s}$ gilt

$$\frac{1}{|n^s|} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}, \quad \text{falls } \operatorname{Re} s \geq 1 + \delta.$$

Nun konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ (vgl. Ana2) □

Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$ konvergiert normal in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$. [ÜA]

Zur Erinnerung: Konvergenzradius

P Potenzreihe

Definition 4.11

$$R(P) := \sup\{r \in \mathbb{R} : P(r) \text{ konvergiert } \}.$$

heißt **Konvergenzradius** *von* P.

Satz 4.12

Es sei P *eine Potenzreihe. Dann ist* $P(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$

- *konvergent (sogar normal), falls* $|z| < R(P)$,
- *divergent, falls* $|z| > R(P)$.

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ Potenzreihe mit Konvergenzradius } R(P)$$

Satz 4.13

Es sei $f := P$. Dann ist f holomorph auf $B_{R(P)}$ und

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Beweis.

Wende Satz 4.6 an. □

Der Potenzreihenentwicklungssatz

$A \subset \mathbb{C}$ offen, $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$

Satz 4.14 (A.-L. Cauchy 1831)

Ist f holomorph und ist $\epsilon > 0$ so klein, dass $B_\epsilon(z_0) \subset A$. Dann läßt sich f dort als Potenzreihe darstellen, d.h.,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \textit{für alle } z \in B_\epsilon(z_0),$$

mit Konvergenzradius $\geq \epsilon$, wobei

$$a_n := \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{für alle } \rho \in (0, \epsilon).$$

Somit: **Eine Funktion ist genau dann holomorph, wenn sie sich lokal als Potenzenreihe (mit Konvergenzradien > 0) darstellen läßt.**

Korollar 4.15

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.14 gilt: Ist $g \in H(A)$ eine weitere Funktion und stimmen $f^{(n)}(z_0)$ und $g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ überein, so gilt $f \equiv g$ in der gesamten Zusammenhangskomponente von A, welche z_0 enthält.

Beweis.

- Potenzreihenentwicklungssatz für $f \Rightarrow f(z_1) = g(z_1)$ für alle $z_1 \in B_\epsilon(z_0)$
- Potenzreihenentwicklungssatz für $f' \Rightarrow f'(z_1) = g'(z_1)$
- usw: $f^{(n)}(z_1) = g^{(n)}(z_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Wiederhole dieses Verfahren: für $\epsilon_1 > 0$ so klein, dass $B_{\epsilon_1}(z_1) \subset A$, gilt nun $f(z_2) \equiv g(z_2)$ (samt allen Ableitungen) für alle $z_2 \in B_{\epsilon_1}(z_1) \subset A$
- So kann man jeden Punkt z in der Zusammenhangskomponente von A erreichen, die z_0 enthält.

□

Beweis vom Satz 4.14 – # 1

- Es sei $\rho > 0$. Cauchysche Integralformel $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in B_\rho(z_0).$$

- Es gilt aber

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \qquad (*) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} \right)^{n+1} (z - z_0)^n,
\end{aligned}$$

wobei die Reihe in $(*)$ konvergiert Dank Quotientenkriterium (da $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$).

- Somit

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} \right)^{n+1} (z - z_0)^n f(\zeta),$$

Beweis vom Satz 4.14 – # 2

- Daher

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\rho(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \, d\zeta \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \\
&\overset{3.16}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n a_n.
\end{aligned}
$$

  (Warum gilt $(*)$? [ÜA])

- Diese Formel gilt zwar in kleinen Kugeln $B_\rho(z_0)$ für $\rho > 0$, eine Potenzreihendarstellung bestimmt aber eine Funktion eindeutig und somit ist die Aussage bewiesen.

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$

Lemma 4.16

Seien A ein Gebiet und f holomorph. Hat die Menge der Nullstellen von f einen Häufungspunkt in A, so ist $f \equiv 0$.

Vorsicht! Das Lemma besagt **nicht**, dass eine holomorphe Funktion nur endlich viele Nullstellen haben darf – vgl. cos.

Beweis vom Lemma 4.16 – #1

- Sei $z_0 \in A$ ein Häufungspunkt von $N(f) := \{z \in A : f(z) = 0\}$.
- Dank Satz 4.14 gilt eine Potenzenreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in B_\rho(z_0),$$

  für $\rho > 0$ klein genug.
- z_0 HP von $N(f) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ z_n \in B_{\frac{1}{n}}(z_0) \cap N(f) \setminus \{z_0\}$, d.h. $f(z_n) = 0$ (sogar ∞-viele davon).
- f holomorph $\Rightarrow f$ stetig $\Rightarrow f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \equiv 0$.
- Aber $f(z_0) = a_0$ nach Definition! $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$
- Auch die Funktion $\frac{f(\cdot)}{\cdot - z_0}$ hat eine Nullstelle in z_0 und hat die Potenzenreihenentwicklung

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n.$$

  Somit verschwindet (Beweis wie oben!) ihr erster Koeffizient a_1.

Beweis vom Lemma 4.16 – #2

- Usw.: $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $f_{|B_\epsilon(z_0)} \equiv 0$ für $\epsilon > 0$ klein genug.
- Anders gesagt: Jeder Häufungspunkt z_0 von $N(f)$ hat eine offene Umgebung von Nullstellen, d.h.: die Menge B der Häufungspunkte von $N(f)$ ist offen.
- Auch ist die Menge C derjenigen $z \in A$, die *keine* Häufungspunkte von $N(f)$ sind, offen ([Warum? ÜA])
- $B \cap C = \emptyset$, $B \cup C = A$ und somit kann man die charakteristische Funktion
$$1_B : A \ni z \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in B, \\ 0 & \text{falls } z \in C, \end{cases}$$
definieren.
- Da B, C offen sind und A zusammenhängend, können die Werte von 1_B beliebig weit fortgesetzt werden und somit ist f überall konstant.
- Die einzige Möglichkeit nun, um ein $\lightning$ zu meiden, ist dass $B = \emptyset$ oder $C = \emptyset$. Aber $z_0 \in B$, also ist $C = \emptyset$.
- Somit ist $A = B$, d.h., jedes Element von A ist Häufungspunkt von $N(f)$. Wie vorher: $f_{|B} \equiv 0$ und somit $f \equiv 0$.

Anmerkung 4.17

Zur Erinnerung: Genau dann ist eine Menge zusammenhängend, wenn sie nicht Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen ist.

Damit folgt $C = \emptyset$ eigentlich direkt aus der Tatsache, dass $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ und B, C offen.
Unser Beweis über 1_B ist deshalb nötig, weil wir nicht über die obige Charakterisierung zusammenhängeder Mengen verfügen.

Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen

$A \subset \mathbb{C}$, $f, g : A \to \mathbb{C}$

Satz 4.18

Sind A ein Gebiet und f, g holomorph, so sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) $\{z \in A : f(z) = g(z)\}$ *hat einen Häufungspunkt in A.*

(b) $f \equiv g$.

(c) $f^n(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ *für ein $z_0 \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b) Wende Lemma 4.16 an $\varphi := f - g$ an.
(b) $\Rightarrow$ (c) Klar.
(c) $\Rightarrow$ (b) vgl. Korollar 4.15.
(b) $\Rightarrow$ (a) Klar.

$\square$

$A \subset \mathbb{C}$, $f, g : A \to \mathbb{C}$

Korollar 4.19

Seien G ein Gebiet und f, g holomorph.
Gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $f(x_n) = g(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Nimmt die Folge ∞-viele Werte an und konvergiert sie in A, so ist $f \equiv g$.

Beweis.

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ist Häufungspunkt der Menge $N(f - g)$ der Nullstellen von $f - g$.
- Dieser Häufungspunkt befindet sich in A.
- Wende Lemma 4.16 an.
- (Würde die Folge nur endlich viele Werte anhnehmen, wäre z.B. die Folge schließlich konstant, so könnte nicht jede beliebig kleine Umgebung von $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ unendlich viele Punkte von $N(f - g)$ enthalten, die zudem unterschiedlich von $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sind $\Rightarrow$ kein Häufungspunkt!)

$\square$

$A \subset \mathbb{C}$, $r > 0$, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$
Beachte: Seien $\overline{B_r(z_0)} \subset A$ und f holomorph. Cauchysche Integralformel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z} s'(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z} e^{i\theta}\, d\theta, \qquad z \in B_r(z_0) \end{aligned}$$

da $\partial B_r(z_0)$ die Parametrisierung

$$\gamma \simeq s : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto z_0 + re^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

hat.

Die Mittelwerteigenschaft

$A \subset \mathbb{C}$, $r > 0$, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$

Insbesondere: Seien $\overline{B_r(z_0)} \subset A$ und f holomorph. Dann

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\; d\theta,$$

d.h.: der Wert einer holomorphen Funktion in einem z_0 ist vollkommen bestimmt durch die Werte aller Punkte, die Abstand r haben von z_0 (r klein genug, aber sonst beliebig).

Man sagt: f hat die **Mittelwerteigenschaft** (MWE).

Anmerkung 5.1

- Holomorphe Funktionen haben die MWE.
- Summe von Funktionen mit der Mittelwerteigenschaft haben selber die MWE.
- Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ und hat f die Mittelwerteigenschaft, so hat αf selber die MWE.
- Allgemeiner gilt: harmonische Funktionen haben die MWE (z.B. $\Re f$, $\Im g$ sind nicht holomorph, sind aber harmonisch und haben somit die MWE).

$A \subset \mathbb{C}$, $r > 0$, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 5.2

Ist f stetig und hat die Mittelwerteigenschaft und ist ferner $\overline{B_r(z_0)} \subset A$, so gilt

$$|f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)|$$

Insbesondere gilt die obige Eigenschaft also, wenn f in einer Umgebung von A holomorph ist.

Beweis.

Mittelwerteigenschaft $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| \, d\theta \\ &\leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \, d\theta \\ &= \max_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)| \end{aligned}$$

$\square$

$A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$
Allgemeiner gilt:

Lemma 5.3

Hat f die Mittelwerteigenschaft und ist $z_0 \in A$ eine lokale Maximumstelle für $|f|$, so gibt es $\epsilon > 0$ s.d. $f_{|B_\epsilon(z_0)} \equiv const$.

Korollar 5.4

Seien A ein Gebiet und $f \in H(A)$ nicht (mal lokal) konstant. Ist $z_0 \in A$ eine lokale Minimumstelle für $|f|$, so ist $f(z_0) = 0$.

Beweis.

- Angenommen $f(z) \neq 0 \; \forall z \in A$
- Dann $\frac{1}{f} \in H(A)$
- $\frac{1}{f}$ hat genau dort ein Maximum, wo f ein Minimum hat.
- $\Rightarrow f$ ist lokal konstant wenn $|f|$ ein Minimum ($\neq 0$) hat.

$\square$

Beweis vom Lemma 5.3 – #1

- Ist $f(z_0) = 0$, so ist die Aussage klar.
- Ist $f(z_0) \neq 0$, so kann man o.B.d.A. annehmen, dass $f(z_0) \in (0, \infty)$ (sonst betrachte $c \in \mathbb{C}$ s.d. $|c| = 1$ und $cf(z_0) > 0$ (Warum gibt es ein solches z_0? [ÜA]) und arbeite mit cf, das die MWE hat und $|cf(z_0)| = |f(z_0)|$ erfüllt, statt mit f).
- Sei $r > 0$ klein genug, dass $|f(z)| \leq f(z_0)$ für alle $z \in B_r(z_0)$.
- Da f die Mittelwerteigenschaft besitzt, gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta \qquad \text{für alle } \rho \in (0, r].$$

Beweis vom Lemma 5.3 – #2

- $h : \overline{B_r(z_0)} \ni z \mapsto \operatorname{Re} f(z) - f(z_0) \in \mathbb{R}$ hat die MWE (laut Anmerkung 5.1), erfüllt $h(z_0) = 0$ und auch

  $$(*) \qquad h(z) \leq |f(z)| - f(z_0) \leq 0, \qquad \text{für alle } z \in \overline{B_r(z_0)}.$$

- Somit

  $$0 = h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta \text{für alle } \rho \in (0, r].$$

  Das Integral der wegen $(*)$ $\mathbb{R}_-$-wertigen Funktion h kann nur dann gleich Null sein, wenn $h \equiv 0$, d.h.

  $$(**) \qquad \operatorname{Re} f(z) \equiv f(z_0) \qquad \text{auf } \overline{B_r(z_0)}.$$

  Noch z.z.: $\operatorname{Re} f \equiv f$ auf $\overline{B_r(z_0)}$.

- Somit

  $$|f(z)| \leq |f(z_0)| = f(z_0) \overset{(**)}{=} \operatorname{Re} f(z) \qquad \text{auf } \overline{B_r(z_0)}.$$

- Daher $\operatorname{Re} f \equiv |f|$, $\operatorname{Im} f \equiv 0$ auf $\overline{B_r(z_0)}$
- $(**) \Rightarrow f \equiv f(z_0)$ auf $\overline{B_r(z_0)}$.

□

Das Maximumprinzip

$A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 5.5

Sei A offen.

(1) *Hat f die MWE und ist z_0 eine lokale Maximumstelle für $|f|$, so ist f auf A_0, der Zusammenhangskomponente von A, die z_0 enthält, konstant.*

(2) *Zudem: Ist A beschränkt und $f \in C(\overline{A})$ (insbesondere: f hat eine stetige Fortsetzung auf den Rand), so hat $|f|$ eine globale Maximumstelle $\in \partial A$.*

(Vgl. mit konkaven glatten Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$!)

Beweis vom Satz 5.5

Zu (1):

- Sei $M := f^{-1}(f(z_0))$: M ist abgeschlossen. (Da f nicht notwendigerweise bijektiv ist, kann M mehrere Elemente enthalten.)
- Es sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $f_{|B_\epsilon(z_0)} \equiv f(z_0)$. Dann ist $B_\epsilon(z_0)$ Umgebung von z_0 in $M \Rightarrow M$ auch offen.
- Lemma 1.19 $\Rightarrow M = \emptyset$ (unmöglich, da $z_0 \in M$) oder eben $M = A_0$.

Zu (2):

- $|f|$ ist stetig auf einem Kompaktum $\Rightarrow |f|$ nimmt sein globales max an.
- Befindet sich eine globale Maximumstelle in $x_0 \in A$, so ist $|f|$ auf einer Zusammenhangskomponente, etwa A_0, konstant $\Rightarrow$ auch jedes Element von ∂A_0 ist Maximumstelle von $|f|$.

$\square$

Mit demselben Beweis kann man eine stärkere Version des Korollars 5.4 beweisen.

Korollar 5.6

Seien A offen und habe f die MWE. Ist $z_0 \in A$ eine lokale Minimumstelle für $|f|$ und ist f nicht lokal konstant, so ist $f(z_0) = 0$.

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$

Lemma 5.7

Ist A ein Elementargebiet und $f \in H(A)$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in A$. Dann gibt es $h \in H(A)$ mit

$$f(z) = \exp(h(z)).$$

Korollar 5.8

Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in A$, so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ $H \in H(A)$ mit

$$f(z) = H^n(z) \qquad z \in A$$

(sog. **holomorphe** n**-te Wurzel***)*

Beweis.

Betrachte

$$H(z) := \exp\left(\frac{1}{n} h(z)\right).$$

□

Beweis vom Lemma 5.7

- $\frac{f'}{f}$ ist wohldefiniert und auf A holomorph.
- Nach Def. von *Elementargebiet* hat $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion Φ.
- Es gilt: $\left(\frac{\exp\circ\Phi}{f}\right)' \equiv 0$ auf A.
- $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C}$ mit $\exp\circ\Phi \equiv cf$
- $c \neq 0$ (dann giltnach off $\exp(w) \neq 0$ für alle $w \in \mathbb{C}$)
- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ surjektiv $\Rightarrow c = \exp(c_0)$ für ein $c_0 \in \mathbb{C}$
- Betrachte $h : A \ni z \mapsto \Phi(z) - c_0 \in \mathbb{C}$, da

$$\exp(h(z)) = \frac{\exp(\Phi(z))}{\exp(c_0)} = \frac{\exp(\Phi(z))}{c} = f, \qquad z \in A.$$

$\square$

Gebietstreue holomorpher Funktionen

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 5.9

Ist A ein Gebiet und $f \in H(A)$ mit f nichtkonstant, so ist $f(A)$ auch ein Gebiet.

(Manchmal: **Satz über die offene Abbildung**)

Anmerkung 5.10

Ist hingegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff'bar, so muss $f(\mathbb{R})$ nicht offen sein – Beispiel?

Beweis vom Satz 5.9 – #1

- Stetige Funktionen bilden zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen ab.
- Somit (Dank Satz 1.20): Stetige Funktionen bilden offene kurvenzusammenhängende Mengen auf offenen kurvenzusammenhängende Mengen ab.
- f holomorph $\Rightarrow$ f stetig.

Noch z.z.: $f(A)$ ist offen.

- Sei $z_0 \in A$, o.B.d.A. $z_0 = f(z_0) = 0$ (sonst? [ÜA]).
- Potenzreihenentwicklungssatz: Entwickle f als Potenzenreihe um 0

$$f(z) = a_n z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{a_n} z^m =: z^n h(z)$$

  wobei n das kleinste Element von $\mathbb{N}^*$ ist, mit $a_n \neq 0$ (wäre $n = 0$, dann $f(0) = a_0 \neq 0$).
- O.b.d.A.: $a_n = 1$. Denn sonst betrachte $\tilde{f} := \frac{1}{a_n} f$: genau dann ist $\tilde{f}(A)$ offen, wenn $f(A)$ offen ist.
- Dabei ist $h_{|B_\epsilon(0)}$ holomorph und $\neq 0$, für $\epsilon > 0$ klein genug (sonst: Korollar 4.15 $\Rightarrow$ $f \equiv 0$). Somit ist o.B.d.A. $a_n = 1$.

Beweis vom Satz 5.9 – #2

$$f(z) = z^n \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m =: z^n h(z)$$

- Korollar 5.8 $\Rightarrow \exists\ h_0$ mit $h_0^n = h$
- Führe $f_0 := \mathrm{id} \cdot h_0 : z \mapsto z h_0(z)$ ein.
- $f_0'(0) = h_0(0) + 0h'(0) = h_0(0) \Rightarrow f_0'(0)^n = a_n \neq 0$
- Wende Satz 1.31 auf f_0 an $\Rightarrow f_0(A)$ ist offen...
- ...und zwar eine offene Umgebung von 0
- f_0 erfüllt

$$f_0(z)^n = (z h_0(z))^n = z^n h(z) = f(z), \qquad z \in B_\epsilon(0).$$

- Noch z.z.: $f = (\cdot)^n \circ f_0$ hat offenes Bild. Dazu reicht es z.z.: $(\cdot)^n$ bildet offene Umgebungen von 0 nach offenen Umgebungen von 0 ab.
- In der Tat: $p := (\cdot)^n : z \equiv r \exp(i\theta) \mapsto z^n \equiv r^n \exp(in\theta) \Rightarrow$ $p(B_\epsilon(0)) = B_{\epsilon^n}(0)$.

$\square$

Singularitäten

$A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$

Definition 6.1

Seien A offen, $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \notin A$. Gibt es $\epsilon > 0$ s.d. $B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset A$, so heißt z_0 **Singularität** *(manchmal:* **isolierte Singularität***) von f.*

Ist eine Funktion an einem z_0 nicht $\mathbb{C}$-diff'bar, so kann es trotzdem sein, dass $f : R_{a,b}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei

$$R_{a,b}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}$$

ein **offenes Ringgebiet** ist: z.B., wenn f in z_0 eine Singularität hat.

Hebbare Singularitäten

$A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$

Definition 6.2

Ist $B \subset \mathbb{C}$ mit $A \subset B$, so sagt man, f lasse sich auf B **holomorph fortsetzen**, *falls es $\tilde{f} \in H(B)$ existiert, mit $\tilde{f}_{|A} = f$.*

Definition 6.3

Ist A offen und z_0 eine Singularität von f, so heißt z_0

- **hebbar**, *falls f sich auf $A \cup \{z_0\}$ holomorph fortsetzen läßt;*
- *ein* **Pol**, *falls für alle $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ aus $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ folgt $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$;*
- **wesentlich**, *falls z_0 weder hebbar noch ein Pol ist.*

Anmerkung 6.4

Sei $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph.
Dann: z_0 ist ein Pol von $f \Leftrightarrow \exists g \in H(A)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und $\exists n \in \mathbb{N}^*$ s.d.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}.$$

Das kleinste solche n heißt **Ordnung** des Pols.

Beispiel 6.5

- Ist $A := \mathbb{C}^*$, so ist 0 eine hebbare Singularität von $f : A \ni z \mapsto \frac{\sin z}{z} \in \mathbb{C}$: Setze f durch 1 fort. (Vorsicht! Die Bedingung $g(z_0) \neq 0$ ist notwendig in der vorigen Anmerkung, sonst wäre z.B. in diesem Fall 0 ein Pol.)
- Ist $A := \mathbb{C}^*$, so ist 0 ein Pol n. Ordnung von $f : A \ni z \mapsto z^{-n} \in \mathbb{C}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$ ist holomorph auf $\mathbb{C}^*$, während 0 eine wesentliche Singularität ist: Denn für $x_n := \frac{i}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ aber

  $$\exp\left(\frac{1}{x_n}\right) = \exp\left(\frac{n}{i}\right) = \exp(-in) \not\to \infty$$

  $\Rightarrow$ 0 ist kein Pol; und auch keine hebbare Singularität, denn sonst sollte die Funktion holomorph (und insbesondere stetig) fortsetzbar sein.

$A \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 6.6 (B. Riemann 1851)

Ist $f \in H(A)$ und z_0 eine Singularität, so sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) *f läßt sich holomorph auf $A \cup \{z_0\}$ fortsetzen.*

(b) *f läßt sich stetig auf $A \cup \{z_0\}$ fortsetzen.*

(c) *f ist auf einer Umgebung von z_0 beschränkt.*

Beweis vom Satz 6.6 – #1

- $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ klar: ist $\tilde{f}$ Fortsetzung von f auf $B_r(z_0)$, so ist $\tilde{f}$ auf dem Kompaktum $\overline{B_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ stetig und somit beschränkt.
- Betrachte
$$h : z \mapsto \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0, \end{cases}$$
welches sowohl in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ als auch in z_0 $\mathbb{C}$-diff'bar ist: Denn
$$h'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0.$$
- Somit ist $h \in H(B_r(z_0))$: Betrachte seine Potenzreihenentwicklung
$$h(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n+2} z^{n+2}$$
(da $h(z_0) = h'(z_0) = 0$).

$\square$

Beweis vom Satz 6.6 – #2

- So gilt
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+2} z^n, \qquad z \neq z_0.$$
- Eine/die gesuchte holomorphe Erweiterung von f ist somit
$$\tilde{f} : z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+2} z^n.$$

$\square$

Satz 6.7 (P.A. Laurent 1841)

Es sei $f : R_{a,b}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann läßt sich f darstellen V.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in R_{a,b}(z_0),$$

Diese **Laurentreihe** *ist eindeutig bestimmt durch*

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } \rho \in (a, b), n \in \mathbb{Z}.$$

Diese Reihe konvergiert in $R_{a,b}(z_0)$ normal.

(Ohne Beweis)

Dass die Laurentreihe **normal konvergent** ist, bedeutet, dass sowohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ als auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ normal konvergieren.

Meromorphe Funktionen

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Definition 6.8

f heißt **meromorph**, *falls es $A_0 \subset A$ gibt, so dass*

- *A_0 keine Häufungspunkte hat*
- *$f_0 := f_{|A \setminus A_0}$ ($\mathbb{C}$-wertig und) holomorph ist und*
- *jedes Element von A_0 Pol von f_0 ist.*

A_0 heißt somit **Polstellenmenge** von f – Bezeichnung:

$$P(f) := A_0 \equiv f^{-1}(\{\infty\})$$

Meromorphe Funktionen sind Quotienten holomorpher Funktionen

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$

Satz 6.9

f ist genau dann meromorph, wenn $\exists A_0 \subset A$ mit

- *f ist holomorph auf $A \setminus A_0$ und*
- *für jedes $z_0 \in A_0$ $\exists \epsilon > 0$ so dass $B_\epsilon(z_0) \subset A$ und $\exists g, h \in H(B_\epsilon(z_0))$ s.d.*

$$f = \frac{g}{h} \quad \text{auf } B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

(Ohne Beweis)

Beispiele

- Holomorphe Funktion sind (trivialerweise) meromorph.
- $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist meromorph.
- Allegemeiner: $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ ist meromorph auf ganz $\mathbb{C}$, wobei P, Q Polynome vom Grad m bzw. n, $m, n \in \mathbb{N}$.
- Γ ist meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ (vgl. Übungsblatt # 5)
- Da 0 eine wesentliche Singularität von $f : z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$ ist, ist f auf ganz $\mathbb{C}$ nicht meromorph – aber auf $\mathbb{C}^*$.
- log ist auf ganz $\mathbb{C}$ nicht meromorph, da sie nur auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ holomorph ist, und $\mathbb{R}_-$ ja Häufungspunkte hat.

Beispiel 6.10

- Ähnlich definiert man Holo- bzw. Meromorphie für $\mathbb{C}^d$-wertige Funktionen, $d \in \mathbb{N}$, bzw. für allgemeine normierte Räume über $\mathbb{C}$
- Ist A eine Hermitesche Matrix, so gibt es U unitäre Matrix so, dass $UAU^{-1} = D$ ist, wobei

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{pmatrix},$$

  wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ die Eigenwerte von A sind.
- $\Rightarrow \lambda \operatorname{Id} - A = U^{-1}(\lambda \operatorname{Id} - D)U$ und

$$(\lambda \operatorname{Id} - A)^{-1} = U^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - \lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda - \lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda - \lambda_d} \end{pmatrix} U$$

  und $F : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto (\lambda \operatorname{Id} - A)^{-1} \in M_d(\mathbb{C})$ ist meromorph. Alle und nur die Eigenwerte von A sind Pole von F.

Das Residuum

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ Singularität von f

Definition 6.11

Wird f in eine Laurentreihe

$$f(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

entwickelt, so heißt a_{-1} **Residuum** *von f in z_0 ($\mathrm{Res}(f, z_0)$).*

Beispiel 6.12

Satz 6.7 $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} f(\zeta) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^{1-1}} dz = a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0).$$

Somit: z_0 hebbar und daher $f : A \to \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = 0$ (dank Cauchyschem Integralsatz).

Definition 6.13

Sei γ eine geschlossene Kurve mit kompaktem Bild, deren Parametrisierungen stetig diff'bar ist. Dann heißt für $z_0 \notin \mathrm{Bild}(\gamma)$

$$w(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta$$

die **Windungszahl** *von γ bzgl. z_0.*
Ist $A \subset \mathbb{C}$ und $\mathrm{Bild}\gamma \subset A$, so heißt γ **nullhomolog** *in A, falls $w(\gamma, z_0) = 0$ für alle $z_0 \in A^C$.*

Anmerkung 6.14

- $w(\gamma, z_0) \in \mathbb{N}$ für alle geschlossenen (nicht unbedingt einfachen!) und stückweisen C^1 Kurven γ und alle $z_0 \notin \mathrm{Bild}(\gamma)$.
- Jede geschlossene und stückweise C^1 Kurve in $\mathbb{C}$ ist trivialerweise nullhomolog.

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$

Lemma 6.15

Seien $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\rho > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Sei $\tilde{\gamma}^m$ die Kurve, die z.B. durch die Parametrisierung

$$r_m : [0, 2\pi] \ni s \mapsto z_0 + \rho \exp(im\theta) \in \mathbb{C}$$

gegeben ist. Dann gilt

$$w(\tilde{\gamma}^m, z_1) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z_1 \notin \overline{B_\rho(z_0)}, \\ m & \text{falls } z_1 \in B_\rho(z_0), \end{cases}$$

(Ohne Beweis)

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$

Lemma 6.16

Seien A offen und $f \in H(A)$. Ist γ nullhomolog in A, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = w(\gamma, z_0) f(z_0) \quad \text{für alle } z_0 \notin \mathrm{Bild}(\gamma)$$

und

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Der Residuensatz

Theorem 6.17

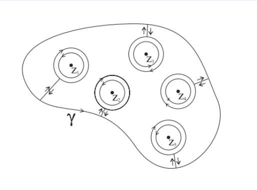
$A \subset \mathbb{C}$, A_0 eine Teilmenge von A ohne Häufungspunkte und $f : A \setminus A_0 \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene Kurve so, dass $\mathrm{Bild}\gamma \subset A \setminus A_0$. Ist γ in A nullhomolog, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{z \in A_0} \mathrm{Res}(f, z) w(\gamma, z).$$

(rechts: nur endlich viele Summanden).

Beweisskizze

- A_0 ist unter diesen Voraussetzungen endlich.
- $\Rightarrow$ Fall von einer Kurve, die aus N (nichtzusammenhängenden) Kreislinien $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ um die Singularitäten besteht.



- Ähnlich ersetzt man γ durch $\tilde{\gamma}^{m_1}, \ldots, \tilde{\gamma}^{m_N}$ wenn γ die wesentliche Singularität z_i m_i-Mal umwindt (vgl. Lemma 6.15)
- Um jede wesentliche Singularität z_i kann man wie folgt das Kurvenintegral entlang γ_i ausrechnen: Laurentreihe $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_i} f(\zeta)\, d\zeta &= \oint_{\tilde{\gamma}^{m_i}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\zeta - z_i)^k \, d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_{\tilde{\gamma}^{m_i}} (\zeta - z_i)^k \, d\zeta \\
&\overset{2.9}{=} c_{-1} \oint_{\tilde{\gamma}^{m_i}} (\zeta - z_i)^{-1} \, d\zeta \overset{6.16}{=} \mathrm{Res}(f, z_i) 2\pi i w(\tilde{\gamma}^{m_i}, z_i).
\end{aligned}$$

□