Einführung in die analytische Theorie der Quantengruppen (Stand: 11. Februar 2012)

Manuel Sebastian Bernhard

10. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und weitere Bemerkungen

Im Vortrag habe ich mich letztlich auf kompakte Quantengruppen beschränkt. Beim Beginn der Ausarbeitung war mir nicht klar, dass das Ziel lokal kompakte Gruppen einzuführen, etwas hoch gegriffen war. Deshalb sind in dieser Ausführung teilweise starke Tendenzen in Richtung dieser Theorie.

Diese „Ausarbeitung“ ist nur als Ansatz zum Verständnis der Quantengruppen gedacht. Es fehlen wichtige Grundlagen, wie die Quantenversion von Peter-Weyl, Darstellungstheorie von Quantengruppen und die (wirklich nicht trivialen) Morphismen von Quantengruppen. Zudem habe ich keinen Beweis ausgeführt, welcher nicht im Vortrag vorkam oder vorkommen sollte und ich nicht rechtzeitig bemerkt habe, dass dies zeitlich nicht zu machen ist.

Dieses Dokument ist aus verschiedenen Quellen zusammengestellt worden. Manche Teile habe ich aus dem Kopf geschrieben oder einen Beweis verfasst ohne dafür einen Beweis gesehen zu haben. Deshalb können einige Dinge sehr umständlich bewiesen und aufgeschrieben sein, oder im schlimmsten Fall sind noch inhaltliche Fehler vorhanden. Ich habe noch keine Literatur zusammengestellt. Man halte sich einfach an die entsprechenden Artikel und Bücher zu (lokal) kompakten Quantengruppen (diese findet man schnell über die Suchmaschine der Wahl). Auch Referenzen innerhalb des Dokuments sind spärlich bis nicht vorhanden.

1.1 Mathematische Eleganz

Unser Ausgangspunkt ist die Pontryagin Dualität. Nach diesem Resultat hat jede lokal kompakte **abelsche** Gruppe eine duale Gruppe, welche mit Recht so bezeichnet wird. Dies soll heißen, dass das Bidual wieder kanonisch isomorph zur Gruppe selbst ist.

Etwas formaler bedeutet dies, dass es einen kontravarianten Funktor

$$\hat{\cdot} : \mathbf{lcA} \to \mathbf{lcA} \quad G \mapsto \hat{G}$$

gibt, sodass $\hat{\hat{\cdot}}$ natürlich äquivalent zur Identität ist.

Das Ziel ist es nun die Pontryagin Dualität auf **nicht abelsche** lokal kompakte Gruppen auszudehnen. Man könnte vermuten, dass man dazu den Weg von Peter-Weyl weiter verfolgt. Dieser hat aber den gewaltigen Nachteil, dass das *Dual* einer kompakten Gruppe nicht wieder eine Gruppe ist. Aus etwas abstraktem Unsinn wird schnell klar, dass das Dual einer nicht-abelschen Gruppe keine topologische Gruppe sein kann. Man muss sich also um eine größere Klasse von abelschen Gruppen bemühen. Ein wichtiger Schritt zu einer selbstdualen Theorie (d.h. in der Theorie gibt es eine Pontryagin Dualität) sind die kompakten Quantengruppen von Woronowicz. Diese Theorie enthielt aber bereits deutlich mehr als die kompakten Gruppen und die Duale zu diskreten Gruppen. Man konnte in diesem Zusammenhang auch deformierte Gruppen (siehe „Mögliche Physikalische Bedeutung und Namensgebung“) betrachten. Objekte, die aus der Deformation von Gruppen entstehen, nennt man aus naheliegenden Gründen **Quantengruppen**. Zu dem Zeitpunkt war dann die Zielsetzung bereits deutlich höher. Man wollte eine Theorie, die möglichst auch alle Quantengruppen umfasst und eine Selbstdualität aufweist.

Dies gelang in sehr vielen Einzelschritten und führt dann zu der durch Johan Kustermans und Stefaan Vaes eingeführten Axiomatisierung von **lokal kompakten reduzierten C*-algebraischen Quantengruppen**.

1.2 Bildverarbeitung

In der Bildverarbeitung ist eines der wichtigsten noch aktuellen Probleme die Extraktion von Informationen unabhängig von Bewegung, Skalierung und Drehung. Das Ziel ist es hier die Effektivität von Lernenden Systemen zu erhöhen. In der Praxis soll beispielsweise ein Roboter lernen Stühle (nicht nur einen bestimmten) zu erkennen. Momentan lernt der Roboter allerdings nicht nur den Gegenstand zu erkennen, sondern auch alle bewegten, skalierten, und gedrehten Stühle. Der Roboter lernt also unnötigerweise auch die Symmetrie mit. Dies bedingt einen erheblichen Mehraufwand beim Lernen. Und gerade das Lernen gestaltet sich als mühsam und scheitert oft an einer zu kleinen Datenbasis (Lernen ist Verallgemeinerung von Beispielen. Muss die Symmetrie gelernt werden, so benötigt dies entsprechend mehr Beispiele).

Idealerweise soll der Roboter 3D-Modelle lernen. Doch davon ist man noch ziemlich weit entfernt. Das nächste Ziel ist meines Wissens zumindest die 2D-Rotationen, Bewegungen und Skalierungen anzugehen. Dazu versucht man die Bildinformation von der Symmetrie zu trennen. Dies geschieht momentan auf Basis einer Reihe von Approximationen und (unbewiesenen!) Annahmen. Zentrale Rolle spielt dabei die Theorie der lokal kompakten nicht-abelschen Gruppen.

Die Skalierung ist dabei bis heute nicht geglückt mit zu integrieren. Grund ist, dass die Symmetrie in der Praxis nicht von einer Gruppe, sondern von einem Gruppoid stammt. Die nötige Approximation ist dadurch bedingt, dass man erst seit kurzem eine Theorie der lokal kompakten nicht-abelschen Gruppen hat. Solange musste man diese Gruppen durch kompakte approximieren.

1.3 Mögliche Physikalische Bedeutung und Namensgebung

Dazu müssen wir etwas ausholen. Wir beginnen mit etwas Quantenmechanik. Die Frage ist, wie man von der klassischen Physik zur Quantenmechanik kommt. In der klassischen Physik ist eine messbare Größe nichts anderes als eine Funktion von Ort und Impuls des betrachteten Teilchensystems. In der Quantenmechanik sind dies allerdings selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum. Wie kommt man nun von dem einen zum anderen? Das erste, was einem ins Auge fällt, ist, dass die Verknüpfung von Operatoren nicht kommutativ ist. Die Multiplikation von Funktionen aber schon. Man muss also die Kommutativität aufgeben. Diesen Prozess bezeichnet man als Deformation (von C*-Algebren). Weil man aber von einer kommutativen Welt nur gewisse Verallgemeinerungen zulässt, wird die Nicht-Kommutativität auch nicht „zu wild“. Wenn man Entsprechendes (was aber bisher nicht gelungen ist mathematisch auch konsistent zu formulieren) auf Felder anwendet, so kommt man zur Quantenfeldtheorie. Glaubt man daran, dass man in diesem Rahmen die Welt beschreiben kann, dann ist die zentrale Aufgabe die Symmetriegruppe der physikalischen Gesetze zu finden. Es hat sich aber schnell herausgestellt, dass wahrscheinlich der übliche Begriff der topologischen Gruppe nicht genügt. Man benötigt eine gewisse Art von Nicht-Kommutativität in der Topologie.

Momentan reduziert sich die Suche nach dieser Symmetrie aber auf einen sehr relaxierten Fall (Super-Lie-Gruppen). Aber warum sollte denn nicht (alles andere ist ja schon quantisiert) nicht auch die Symmetrie zu quantisieren sein? Streng genommen führt dies dann zu **Superquantengruppen**, was aber keine wesentliche Verallgemeinerung von Quantengruppen ist (ähnlich wie der Übergang von Vektorräumen zu Supervektorräumen aber ganz im Gegensatz zum Übergang von Lie-Gruppen zu Lie-Supergruppen). Momentan ist dies zwar eine nette Idee. Aber es stellt sich heraus, dass die Konstruktion von Quantengruppen jenseits der momentanen Möglichkeiten liegt. Es fehlt im Grunde (und dies ist ein offenes Problem!) die Existenz von „Haarmaßen“ unter geeigneten Annahmen. Dieser Defekt macht momentan die Konstruktion von Quantengruppen so schwierig. Ein weiteres Problem (hier kenne ich wieder den Stand der Dinge nicht) ist ein geeigneter Ersatz für das Noether-Theorem in der Lagrange-Theorie der Felder.

Aus dieser Richtung kamen wohl (wie so oft) die meisten Impulse. Der Quantisierungsprozess lieferte schon vor der Entstehung der Theorie Beispiele. Man hat im Grunde um Beispiele herum eine Theorie entwickelt. Eines dieser ersten Beispiele werden wir weiter verfolgen. Der Name „Quantengruppe“ leitet sich aus dieser Begebenheit ab, dass man schlicht deformierte lokal kompakte Gruppen in einer selbstdualen Theorie einbetten wollte.

2 Nicht-kommutative Topologie und kompakte Quantengruppen

2.1 Entwicklung eines Nicht-kommutativen Wörterbuchs

Wir wollen hier an das Theorem von Gelfand-Naimark erinnern. Nach diesem ist jede abelsche C*-Algebra isomorph zu $C_0(X)$ für einen lokal kompakten Hausdorff-Raum X. Dieser ist genau dann kompakt, wenn die Algebra unitär ist. Die Idee der Nicht-kommutativen Geometrie besteht nun darin bekannte topologische Dinge in die Sprache der abelschen C*-Algebren zu übersetzen. Wenn wir diese auch auf nicht-abelsche Algebren ausdehnen können haben wir eine Art Erweiterung der Topologie in einem nicht-kommutativen Rahmen gefunden. Dieses Prinzip - die Entwicklung des Wörterbuches - ist nun der Anhaltspunkt der Verallgemeinerung der lokal kompakten Gruppen. Ziel ist es für diese ein Analogon in der nicht-kommutativen Welt zu finden. Dieses Analogon wird dann Quantengruppe heißen. Bis dahin ist aber viel Arbeit zu tun. Mit einer lokal kompakten Gruppe assoziieren wir nicht nur die Topologie und das Gruppengesetz, sondern auch eine besondere Maßtheorie. Diese muss auch in einen neuen Rahmen gegossen werden. Die Maßtheorie ist in der Tat das, was die meisten Probleme macht. Es ist bis heute nicht klar, ob sich dies automatisch ergibt, oder gefordert werden muss.

Wir haben damit die ersten beiden Einträge der folgenden Tabelle gefunden. Dabei ist die Tabelle so zu lesen, dass es immer eine Bijektion (Mitte - eventuell modulo Isomorphie!) von lokal kompakten Räumen mit den links genannten Begriffen und den abelschen C*-Algebren mit den rechts genannten Begriffen gibt.

Topologie	**Übersetzer**	**C*-Algebren**
lokal kompakter Hausdorff-Raum	$X \rightsquigarrow C_0(X)$	abelsche C*-Algebra
kompakter Hausdorff-Raum	$X \rightsquigarrow C(X)$	abelsche unitäre C*-Algebra
zusammenhängend und kompakt		unitäre abelsche C*-Algebra ohne nicht-triviale Projektionen
stetige Abbildung kompakter Räume	$f : X \to Y \rightsquigarrow (C(Y) \ni g \mapsto g \circ f \in C(X))$	unitärer $*$-Homomorphismus
stetige Abbildung	$f : X \to Y \rightsquigarrow (C_0(Y) \ni g \mapsto g \circ f \in C_b(X))$	Morphismus
Punkt	$x \rightsquigarrow (C(X) \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C})$	Charakter
Punkt	$x \rightsquigarrow \{f : \ f(x) = 0\}$	maximales modulares Linksideal
Konvergenz von Punkten		Punktweise Konvergenz von Charakteren
Produkträume	$X \times Y \rightsquigarrow C_0(X) \otimes C_0(Y)$	Tensorprodukt
Produktabbildung	$f \times g \rightsquigarrow f \otimes g$	Tensorprodukt von Morphismen
endliche positive Radonmaße	$\mu \rightsquigarrow \int \cdot \, d\mu$	positive Funktionale
positive Radonmaße	$\mu \rightsquigarrow \int \cdot \, d\mu$	Gewichte
Produkt endlicher positiver Radonmaße	$\mu \times \lambda \rightsquigarrow f \otimes g$	Tensorprodukt positiver Funktionale
lokal kompakte Halbgruppe	$H \rightsquigarrow (C_0(H), \Delta_H)$	C*-Bialgebra
kompakte Gruppe	$H \rightsquigarrow (C_0(H), \Delta_H)$	kompakte Quantengruppe
lokal kompakte Gruppe	$H \rightsquigarrow (C_0(H), \Delta_H)$	Quantengruppe nach Woronowicz
lokal kompakte Gruppe		lokal kompakte C*-algebraische reduzierte Quantengruppe

Dass die ersten beiden Einträge tatsächlich Bijektionen modulo Isomorphie (Injektivität ist nicht klar, Surjektivität ist Gelfand-Naimark) sind, haben wir nicht gezeigt. Dies wird sich aber automatisch ergeben (wenn wir die Bijektion der stetigen Abbildungen erreicht haben). Der Vollständigkeit halber wird dies aber hier bewiesen. Der Beweis kann aber **nicht** ausgelassen werden, weil wir aus ihm ein wichtige Korollare ableiten.

Satz 1. *Es seien X, Y zwei lokal kompakte Hausdorff-Räume. Ist $C_0(X) \simeq C_0(Y)$, so ist $X \simeq Y$.*

Beweis. Es sei Ω das Gelfand-Spektrum von $C_0(X)$. Wenn wir zeigen, dass $\Omega \simeq X$ ist, dann haben wir die Behauptung bereits erfüllt. Dazu geben wir uns eine Abbildung

$$X \to \Omega \quad x \mapsto (\chi_x : C_0(X) \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C})$$

vor. Wir zeigen zuerst, dass diese Abbildung bijektiv ist. Injektivität ist nach dem Lemma von Urysohn einfach. Die Surjektivität ist etwas kniffliger. Sei dazu χ ein Charakter. Dann ist aber $\mathfrak{m} = \ker \chi$ ein maximales Ideal in $C_0(X)$. Dieses ist abgeschlossen und eine $*$-Unteralgebra von $C_0(X)$. Nach Stone-Weierstraß muss es dann einen Punkt x geben mit $f(x) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{m}$ (wenn dies nicht gelten würde, dann trennt $\mathfrak{m}$ alle Punkte - Idealeigenschaft ausnutzen!). Damit ist aber $\mathfrak{m}$ im echten Ideal $\{f \in C_0(X) : f(x) = 0\}$ enthalten. Es sind also die Ideale identisch. Es gilt also $\chi(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Wie man leicht sieht ist aber damit $\lambda\chi_x = \chi$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei nun $f \in C_0(X)$ beliebig mit $f(x) \neq 0$, dann folgt

$$\lambda\chi(f^2) = \lambda^2\chi_x(f^2) = \lambda^2\chi_x(f)^2 = \chi(f)^2 = \chi(f^2).$$

Da $\chi(f^2) \neq 0$ ist, folgt $\lambda = 1$ und damit die Surjektivität.

Wir müssen nun zeigen, dass dies ein Homöomorphsimus ist. Zuerst zeigen wir die Stetigkeit. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz, welches gegen $x \in X$ konvergiert. Dann folgt auch $f(x_i) \to f(x)$ für alle $C_0(X)$. Also konvergieren χ_{x_i} gegen χ_x in der schwach*-Topologie.

Nun zur Stetigkeit der Umkehrfunktion. Es konvergiere $\chi_{x_i} \to \chi_x$. Das bedeutet, dass $f(x_i) \to f(x)$ für alle $f \in C_0(X)$ gilt. Da man aber Funktionen konstruieren kann, die auf x den Wert 1 haben und außerhalb einer Umgebung den Wert 0, folgt auch $x_i \to x$. Damit sind wir fertig. □

Aus dem Beweis folgen die beiden Korollare.

Korollar 2 (Punkte)**.** *Es sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Dann entsprechen sich bijektiv die Menge der maximalen modularen (d.h. es gibt ein $u \in A$ mit $a - au \in \mathfrak{m}$ für alle $a \in A$. Dabei nennt man u auch das rechte unitäre Element) Linksideale, die Menge der Punkte aus X und die Menge der Charaktere.*

Korollar 3 (Konvergenz)**.** *Es konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ genau dann gegen x, wenn χ_{x_i} in der schwach*-Topologie gegen χ_x geht.*

Man beachte, dass man zwei mögliche nicht-kommutative Verallgemeinerungen von Punkten gefunden hat. Man muss nun immer die adäquate Version wählen. Eigentlich ist die Version mit den maximalen Idealen besser. Aber für unsere Belange reicht die mit den Charakteren. Dies macht keinen Unterschied für das, was wir betrachten. Zu letzterem haben wir mehr gemacht. Deshalb verfolgen wir das weiter. Für das weitere völlig unwichtig, aber eine gute Gelfand-Gymnastik ist das folgende Lemma, dessen Beweis dem Leser überlassen werden soll.

Lemma 4 (Zusammenhang)**.** *Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn $C(X)$ keine nicht-triviale Projektion (d.h. ein $p \neq 0, 1$ mit $p^* = p = p^2$) besitzt.*

Das entsprechende Resultat gilt für lokal kompakte Räume nicht. Daran sieht man, dass man in dem Fall vorsichtiger sein muss, wenn man etwas nicht-kommutativ machen will. Deshalb beschränkte sich der Vortrag auch auf den unitären/kompakten Fall. Dieser kann einige technische Schwierigkeiten umgehen.

2.2 Intermezzo: positive Elemente

Wir haben uns einem kleinen Intermezzo unterzuordnen. Wir beginnen mit einem kleinen Resultat.

Theorem 5. *Es sei A eine C*-Algebra und $a \in A$ ein selbstadjungiertes Element (d.h. $a^* = a$). Dann sind äquivalent:*

i. $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+$.

ii. $\|a - t\| \leq t$ *für ein* $t \geq \|a\|$.

iii. $\|a - t\| \leq t$ *für alle* $t \geq \|a\|$.

Man beachte, dass man Teile der Aussage in A^{un} zu verstehen hat.

Beweis. O.E. kann man A als unitär auffassen. Weiter ist die von a erzeugte unitäre C*-Algebra $C^*(1,a)$ abelsch und damit ist $C^*(1,a) \simeq C(X)$ mit $X = \sigma(a)$. Es ist nun die Äquivalenz der ersten 3 Aussagen offensichtlich. Man kann nämlich a mit einer stetigen Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ identifizieren. □

Definition 6 (positive Elemente)**.** Ein Element $a \in A$ heißt positiv, wenn es selbstadjungiert ist und eine der äquivalenten Eigenschaften aus Theorem 5 erfüllt. Die Menge der positiven Elemente bezeichnet man mit A^+ . Weiter schreiben wir $a \leq b$, genau dann wenn $b - a \in A^+$ ist.

Lemma 7 (Bedeutende Eigenschaften)**.** *Es sei* A *eine C*-Algebra. Dann gilt*

i. *Es sei* $a \in A^+$ *, dann gilt* $f(a) \in (A^{un})^+$ *für positive* $f \in C(\sigma(a))$.

ii. *Für* $a \in A$ *gibt es eindeutig bestimmte selbstadjungierte* $b, c \in A$ *mit* $a = b + ic$.

iii. *Für selbstadjungierte* $a \in A$ *gibt es eindeutig bestimmte* $a_+, a_- \in A^+$ *mit* $a = a_+ - a_-$ *und* $a_+ a_- = 0$.

iv. *Für jedes* $a \in A^+$ *gibt es ein eindeutiges* $b \in A^+$ *mit* $a = b^2$.

v. *Für jedes* $a \in A$ *ist* aa^* *positiv.*

vi. *Für beliebiges* $a \in A$ *und* $b \geq c$ *gilt* $aba^* \geq aca^*$.

vii. *Ist* $a, b \in A^+$ *, so ist* $a + b \in A^+$.

viii. *Gilt* $0 \leq a \leq b$ *und sind* a, b *invertierbar, so gilt auch* $b^{-1} \leq a^{-1}$.

Beweis. Die Aussagen i. und ii. sind offensichtlich. Die nächsten beiden Aussagen sind einfach, wenn $A = C_0(X)$ ist, also wenn A abelsch ist. Im allgemeinen Fall geht man wie folgt vor:

Um die Existenz in iii. und iv. zu beweisen kann man sich auf die abelsche C*-Algebra $C^*(a)$ zurückziehen (dort wurde es schon bewiesen). Die Eindeutigkeit von iii. bzw. iv. zeigt man in der abelschen C*-Algebra $C^*(a, a_+, a_-)$ bzw. $C^*(b) = C^*(b, a)$ (nach Vorbemerkung ist dies bereits gezeigt).

Wir beweisen nun noch Eigenschaft vii. Dies ist einfach, weil

$$\|a + b - 2t\| \leq \|a - t\| + \|b - t\| \leq 2t$$

für große $t \in \mathbb{R}$ folgt.

Weil die Eigenschaft vi. direkt aus iv. und v. folgt und viii leicht aus vi. abgeleitet werden kann, ist noch v. zu zeigen. Dies ist etwas aufwändiger.

Wir zeigen zuerst, dass $\sigma(ab)\backslash\{0\} = \sigma(ba)\backslash\{0\}$ gilt. Wie man leicht sieht, reicht es $1 \in \sigma(ab) \Leftarrow 1 \in \sigma(ba)$ zu zeigen. Es sei $ab - 1$ invertierbar mit der Inversen c . Dann ist $bca - 1$ die Inverse zu $ba - 1$.

Als nächstes zeigen wir, dass falls $aa^* \leq 0$ ist, dann ist $a = 0$. Wenn $aa^* \leq 0$ ist, dann gilt $a^*a \leq 0$ wegen $\sigma(aa^*)\backslash\{0\} = \sigma(a^*a)\backslash\{0\}$. Wir können $a = b + ic$ schreiben mit b, c selbstadjungiert. Dann ist aber $aa^* + a^*a = 2b^2 + 2c^2 \geq 0$ und somit $aa^* = 2b^2 + 2c^2 - a^*a \geq 0$. Damit ist aber $\|a\|^2 = r(aa^*) = 0$.

Nun können wir die Behauptung zeigen. Es sei $a \in A$ beliebig. Weil aa^* selbstadjungiert ist, kann man $aa^* = d - e$ mit $ed = de = 0$ schreiben für positive d, e . Wir betrachten $f = ea$. Dann gilt

$$ff^* = eaa^*e = e(d - e)e = -e^3 \leq 0.$$

Damit folgt $f = 0$ nach dem vorher Gezeigten. Dann folgt aber aus $-e^2 = fa^* = 0$, dass $e = 0$ ist. □

Satz 8 (Existenz einer positiven Approximation der Eins)**.** *Es sei* A *eine C*-Algebra. Sei* Λ *die Menge der positiven Elemente mit Norm* < 1 *und* $\leq$ *die in diesem Abschnitt eingeführte Ordnungsrelation.*

Dann ist $(\Lambda, \leq)$ *eine gerichtete Menge und* $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *ein Netz, welches*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} aa_\lambda = a$$

für alle $a \in A$ *erfüllt. Dabei ist* $a_\lambda = \lambda$ *für alle* $\lambda \in \Lambda$ *.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass dies eine gerichtete Menge ist. Dafür müssen wir nur zeigen, dass es zu $a, b \in \Lambda$ ein $c \in \Lambda$ gibt mit $a, b \leq c$ (die Norm < 1 Bedingung lässt uns noch Raum nach oben). Wir betrachten

$$e = a(1-a)^{-1} \in A^+, \quad f = b(1-b)^{-1} \in A^+.$$

Sei nun $c = (e+f)(1+e+f)^{-1} \in \Lambda$. Es gilt nun $a = e(1+e)^{-1} \leq (e+f)(1+e+f)^{-1} = c$, weil aus $1+e \leq 1+(e+f)$ auch $(1+e)^{-1} \geq (1+(e+f))^{-1}$ und damit

$$e(1+e)^{-1} = 1-(1+e)^{-1} \leq 1-(1+(e+f))^{-1} = (e+f)(1+e+f)^{-1}$$

folgt. Entsprechend folgt auch $b \leq c$.

Wenn die Algebra abelsch ist, dann ist die restliche Aussage offensichtlich. Sei nun $a \in \Lambda$ (das reicht zu betrachten!), dann kann man a durch ein aa_λ (sagen wir mit einem Fehler $< \epsilon$) approximieren. Dazu hat man nur $C^*(a) \subset A$ zu betrachten (diese ist abelsch!). Sei nun $\mu \geq \lambda$. Dann ist aber

$$\|a(1-\mu)\|^2 \leq \left\|a^{\frac{1}{2}}(1-\mu)^{\frac{1}{2}}\right\|^2 = \left\|a^{\frac{1}{2}}(1-\mu)a^{\frac{1}{2}}\right\|,$$

weil $(1-\mu), a \leq 1$ gilt. Weiter ist aber

$$a^{\frac{1}{2}}(1-\mu)a^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}}(1-\lambda)a^{\frac{1}{2}} \leq a - aa_\lambda \leq \epsilon.$$

Dann gilt aber

$$\|a(1-\mu)\| \leq \sqrt{\epsilon}.$$

Dies war dann aber die Behauptung. □

2.3 Nicht-kommutative stetige Abbildung

2.3.1 Stetige Abbildung auf kompakten Räumen

Wenn unser topologischer Raum kompakt ist, also unsere C*-Algebra A unitär ist, dann sind viele Dinge wesentlich einfacher. Wir wollen uns mit diesem Fall nur kurz beschäftigen. Um unseren nicht-kommutativen Eintrag zu erhalten reicht das folgende Theorem.

Theorem 9 (Stetige Abbildungen)**.** *Es seien* X, Y *kompakte Räume. Dann entsprechen sich die unitären* $*$ *-Homomorphismen von* $C(Y) \to C(X)$ *. Dabei wird einer stetigen Abbildung* $f : X \to Y$ *der folgende unitäre* $*$ *-Homomorphismus zugeordnet*

$$C(f): \ C(Y) \to C(X) \quad g \mapsto g \circ f.$$

Weiter gilt $C(f \circ \tilde{f}) = C(\tilde{f}) \circ C(f)$ *für stetige Abbildungen* $f : Y \to Z$ *und* $\tilde{f} : X \to Y$ *.*

Beweis. Der Zusatz ist einfach. Wir zeigen deshalb nur, dass die oben definierte Zuordnung $f \mapsto C(f)$ wohldefiniert und bijektiv ist.

Zur Wohldefiniertheit ist nur zu bemerken, dass man leicht nachrechnet, dass dies ein unitärer $*$-Homomorphismus ist. Hier braucht man schon, dass X kompakt ist. Sonst muss man mit $C_0(X)$ arbeiten. Dann ist nicht mehr klar (und auch i.A. falsch), dass $C(f)g$ wieder im Unendlichen verschwindet.

Gegeben seien stetige Abbildungen $f, \tilde{f}$ mit $C(f) = C(\tilde{f})$. Es sei nun χ_x die Punktauswertung in einem Punkt $x \in X$. Dann ist, wie man leicht sieht $\chi_x \circ C(f)$ die Punktauswertung in dem Punkt $f(x)$. Damit ist aber

$$\chi_{f(x)} = \chi_x \circ C(f) = \chi_x \circ C(\tilde{f}) = \chi_{\tilde{f}(x)}.$$

Es gilt also $f(x) = \tilde{f}(x)$ für alle $x \in X$. Dies zeigt die Injektivität.

Die Surjektivität geht ähnlich. Es sei $\varphi : C(Y) \to C(X)$ ein beliebiger unitärer $*$-Homomorphismus. Dann ist $\chi_x \varphi$ für einen Punkt $x \in X$ (und χ_x die zugehörige Punktauswertung) wieder ein $*$-Homomorphismus. Dieser verschwindet nicht ($1 \in A$ und $\varphi(1) = 1$ wird hier benötigt!). Damit ist $\chi_x \circ \varphi = \chi_{f(x)}$ für einen eindeutig bestimmten Punkt $f(x) \in Y$. Wir definieren nun

$$f : X \to Y \quad x \mapsto f(x).$$

Diese Abbildung ist stetig. Sei dazu $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz von Punkten aus X , welches gegen ein $x \in X$ strebt. Dann geht χ_{x_i} punktweise gegen χ_x . Damit geht auch $\chi_{x_i} \circ \varphi$ punktweise gegen $\chi_x \circ \varphi$. Also nach Definition geht damit $\chi_{f(x_i)}$ punktweise gegen $\chi_{f(x)}$. Dies bedeutet aber, dass $f(x_i)$ gegen $f(x)$ geht. Also ist f stetig. Es ist damit aber

$$\varphi(g)(x) = g(f(x)) = (C(f)g)(x)$$

für alle $x \in X$. Damit folgt sofort die Surjektivität der Abbildung. □

Mit anderen Worten ist über den Funktor C die duale Kategorie der kompakten Räume äquivalent zur Kategorie der unitären C*-Algebren mit den unitären $*$-Homomorphismen. Damit ist sowohl das Theorem von Gelfand-Naimark als auch dieses Theorem und der Satz 1 gekapselt in dieser Aussage.

Auf nicht kompakten Räumen sieht die Situation ganz anders aus. Dies wollen wir hier verfolgen.

2.3.2 Multiplieralgebren

Definition 10 (Adjungierbar)**.** Es sei A eine C*-Algebra. Eine Abbildung $T : A \to A$ heißt adjungierbar, falls es ein $S : A \to A$ mit

$$S(a)^* b = a^* T(b)$$

für alle $a, b \in A$ gibt.

Man bezeichnet S (welches eindeutig durch T bestimmt ist) auch mit T^* . Man kann leicht sehen, dass T eine A-lineare Abbildung ist. Weiter sieht man sofort, dass T stetig ist und T^* adjungierbar ist.

Definition 11 (Multiplieralgebra)**.** Es sei A eine C*-Algebra. Dann definiert

$$\mathcal{M}(A) := \{M : A \to A : \ M \text{ adjungierbar.}\}$$

mit den kanonischen Operationen und der kanonischen Norm eine C*-Algebra. Man nennt $\mathcal{M}(A)$ die **Multiplieralgebra** von A.

Das einzig schwierige ist die C*-Identität nachzuweisen. Dazu sei $M \in \mathcal{M}(A)$

$$\|M\|^2 = \sup_{\|a\|=1} \|Ma\|^2 = \sup_{\|a\|=1} \|(Ma)^* Ma\| = \sup_{\|a\|=1} \|(M^* Ma)^* a\| \leq \sup_{\|a\|=1} \|M^* Ma\| = \|M^* M\|,$$

was automatisch $\|M\|^2 = \|MM^*\|$ impliziert. Über die Identifizierung von $a \in A$ mit $M_a : A \to A$, wobei $M_a(b) = ab$ ist, wird A eine Unter-C*-Algebra und ein Ideal von $\mathcal{M}(A)$.

Satz 12 (Universelle Eigenschaft der Multiplieralgebra)**.** *Es sei A eine C*-Algebra. Für jede C*-Algebra B , welche A als Unter-C*-Algebra und als Ideal enthält (wenn also $AB \subset A$ und $BA \subset A$ gilt), gibt es genau einen $*$-Homomorphismus $B \to \mathcal{M}(A)$, welcher auf A die Identität ist.*

Beweis. Es bezeichne mit M_b für $b \in B$ die Abbildung

$$M_b : A \to A \quad a \mapsto ba.$$

Die Abbildung

$$B \to \mathcal{M}(A) \quad b \mapsto M_b$$

ist klarerweise ein $*$-Homomorphismus mit den verlangten Eigenschaften. Sei $\varphi : B \to \mathcal{M}(A)$ ein $*$-Homomorphismus mit den verlangten Eigenschaften, dann ist

$$\varphi(a) = M_a$$

für $a \in A$. Nun ist aber

$$\varphi(b)M_a = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba) = M_{ba}$$

für $a \in A$ und $b \in B$. Mit anderen Worten ist nun $\varphi(b) = M_b$ auf $A \cdot A$. Damit ist aber $\varphi(b)$ bereits auf A^+ mit M_b identisch. Damit auch auf A, womit $M_b = \varphi(b)$ gezeigt wäre. □

Satz 13 (Multiplieralgebra von $C_0(X)$). *Es sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Dann gibt es eine kanonische $*$-Isomorphie*

$$\mathcal{M}\left(C_0(X)\right) \simeq C_b(X).$$

Beweis. Wir zeigen, dass $C_b(X)$ die universelle Eigenschaft der Multiplieralgebra hat. Sei dazu B eine C*-Algebra, in welcher $C_0(X)$ ein Ideal und eine Unter-C*-Algebra ist. Ist nun $\varphi : B \to C_b(X)$ eine Abbildung wie in der universellen Eigenschaft verlangt, so gilt

$$(gf)(x) = \varphi(gf)(x) = \varphi(g)(x)\varphi(f)(x) = \varphi(g)(x)f(x)$$

für alle $x \in X$, $f \in C_0(X)$ und $g \in B$. Folglich ist $\varphi(g)$ bereits eindeutig durch g bestimmt. Wir versuchen nun zu zeigen, dass die Setzung von

$$\varphi(g) : x \mapsto \frac{(gf)(x)}{f(x)}$$

für $g \in B$ und $f \in C_0(X)$ mit $f(x) \neq 0$ eine wohldefinierte Abbildung von X nach $\mathbb{C}$ ist. Seien dazu $f_1, f_2 \in C_0(X)$ mit $f_1(x) \neq 0 \neq f_2(x)$, dann gilt

$$\frac{(gf_1)(x)}{f_1(x)} = \frac{(gf_1)(x)f_2(x)}{(f_1f_2)(x)} = \frac{(gf_1f_2)(x)}{(f_1f_2)(x)} = \frac{(gf_2)(x)f_1(x)}{(f_1f_2)(x)} = \frac{(gf_2)(x)}{f_2(x)}.$$

Wegen der Stetigkeit der Multiplikation in B und der Auswertungsabbildung in $C_0(X)$ ist $\varphi(g)$ stetig. Weiter ist $|\varphi(g)|$ durch $\|g\|$ beschränkt, wie man durch Wahl von $f \in C_0(X)$ mit $f(x) = \|f\|$ erkennt. Folglich ist $\varphi(g) \in C_b(X)$. Die so definierte Abbildung

$$\varphi : B \to C_b(X) \quad g \mapsto \varphi(g)$$

ist trivialerweise eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und mit $*$-verträglich. Die Multiplikativität ergibt sich leicht ($g \in B$ und $f \in C_0(X)$ mit $f(x) \neq 0$) aus der Identität

$$\frac{(gf)(x)}{f(x)} = \frac{(fgf)(x)}{f(x)^2} = \frac{(fg)(x)}{f(x)}.$$

Natürlich gilt auch $\varphi(g) = g$, falls $g \in C_0(X)$ ist. Also folgt auch die Existenz des $*$-Homomorphismus welcher in der universellen Eigenschaft behauptet wird. □

2.3.3 Morphismen von C*-Algebren

Es stellt sich die Frage, wozu wir mit so viel Aufwand die Multiplieralgebra definiert haben. Der Grund liegt darin, dass wir stetige Abbildungen in unsere nicht-kommutative Welt übertragen wollen. Dazu hilft das folgende Theorem.

Theorem 14. *Es seien X, Y lokal kompakte Hausdorffräume. Dann ist die Abbildung*

$$(f : X \to Y) \mapsto (g \mapsto g \circ f)$$

eine Bijektion zwischen den stetigen Abbildungen $X \to Y$ und den $*$-Homomorphismen $\varphi : C_0(Y) \to C_b(X)$, für die $\varphi\left(C_0(Y)\right)C_0(X)$ linear dicht (auch total genannt) in $C_0(X)$ ist.

Beweis. Natürlich ist die Abbildung wohldefiniert und injektiv. Es ist also nur die Surjektivität zu zeigen. Dazu sei $\varphi : C_0(Y) \to C_b(X)$ ein $*$-Homomorphismus mit $\varphi(C_0(Y))\, C_0(X)$ linear dicht in $C_0(X)$. Weiter sei $\chi_x : C_b(X) \to \mathbb{C}$ die Auswertung $\chi_x(f) = f(x)$ für ein $x \in X$. Dann ist $\chi_x \circ \varphi : C_0(Y) \to \mathbb{C}$ ein stetiger $*$-Homomorphismus. Dieser verschwindet nicht wegen der Dichtheitsvoraussetzung. Also ist $\chi_y = \chi_x \circ \varphi$ für ein $y \in Y$. Setzt man nun $f(x) := y$, so erhält man eine Abbildung $f : X \to Y$, die $\varphi(g) = g \circ f$ für $g \in C_0(Y)$ erfüllt.

Die Abbildung ist stetig. Sei dazu (x_λ) ein Netz, welches gegen $x \in X$ konvergiert. Damit geht $\chi_{x_\lambda}(g)$ gegen $\chi_x(g)$ für alle $g \in C_b(X)$. Also geht auch $\chi_{f(x_\lambda)}(h)$ gegen $\chi_{f(x)}(h)$ für alle $h \in C_0(Y)$. Also geht $\chi_{f(x_\lambda)}$ gegen $\chi_{f(x)}$ in der Topologie des Gelfand-Spektrums. Damit geht auch $f(x_\lambda)$ gegen $f(x)$. □

Eine Erweiterung von stetigen Abbildungen auf nicht-kommutative topologische Räume bietet der Begriff der Morphismen. Wir haben also einen weiteren Eintrag für das Wörterbuch.

Definition 15 (Morphismen zwischen C*-Algebren)**.** Ein Morphismus $f : A \to B$ von einer C*-Algebra in eine C*-Algebra B ist ein $*$-Homomorphismus $f : A \to \mathcal{M}(B)$ mit $f(A)B$ dicht in B. Mit $\mathrm{Mor}(A,B)$ bezeichnen wir die Morphismen von A nach B (Man beachte, dass ich einen Unterschied machen zwischen $*$-Homomorphismen und Morphismen!). Es ist also

$$\mathrm{Mor}(A,B) := \{f : A \to \mathcal{M}(B) \mid f(A)B \text{ ist linear dicht in } B\}.$$

Es stellt sich nun die nicht ganz unwichtige Frage, wie man zwei solche Morphismen verknüpft. Dies sollte natürlich mit der Verknüpfung von stetigen Abbildungen im kommutativen Fall verträglich sein.

Lemma 16. *Für jeden Morphismus $f : A \to B$ gibt es genau einen unitären $*$-Homomorphismus $\tilde{f} : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$ mit $f(a) = \tilde{f}(a)$ für alle $a \in A$.*

Beweis. Es sei $a \in A$, $b \in B$ und $M \in \mathcal{M}(A)$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\tilde{f}(M)f(a)b = \tilde{f}(Ma)b = f(Ma)b.$$

Damit ist aber $\tilde{f}(M)$ als Funktion auf $f(A)B$ festgelegt. Weil aber auch $f(A)B$ linear dicht ist in B, ist $\tilde{f}(M)$ eindeutig bestimmt. Das war der Beweis zur Eindeutigkeit. Nun zur Existenz.

Wir setzten für $M \in \mathcal{M}(A)$ den Wert von $\tilde{f}$ als die eindeutigen stetige Abbildung $\tilde{f}(M) : B \to B$ fest, welche für alle $a \in A$ und $b \in B$

$$\tilde{f}(M)f(a)b = f(Ma)b$$

erfüllt. Von der Wohldefiniertheit überzeugt man sich leicht (Approximation der Eins in A!). Man hat noch nachzuweisen, dass $\tilde{f}(M)$ adjungierbar ist. Die Adjungierte wird dabei gegeben durch $\tilde{f}(M^*)$. Man beachte dazu, dass für alle $a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B$

$$\left(\tilde{f}(M^*)\, f(a_1)b_1\right)^* f(a_2)b_2 = b_1^* f(a_1^* M) f(a_2) b_2 = b_1^* f(a_1)^* f(Ma_2) b_2 = (f(a_1)b_1)^* \left(\tilde{f}(M) f(a_2) b_2\right)$$

gilt. Weiter kann man nachrechnen, dass $\tilde{f}$ einen $*$-Homomorphismus bildet. □

Definition 17 (Verknüpfung von Morphismen)**.** Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Morphismen von C*-Algebren. Dann definiert man

$$g \circ f : A \to C$$

über $(g \circ f)(a) = (\tilde{g} \circ f)(a)$.

Man sieht nun leicht ein, dass die Verknüpfung von Morphismen mit der Verknüpfung von stetigen Abbildungen (in umgekehrter Reihenfolge!) verträglich ist. Mit anderen Worten haben wir einen voll treuen kontravarianten Funktor

$$\begin{gathered}\mathbf{lcHS} \to \mathbf{C^*Alg} \\ X \mapsto C_0(X) \\ (f : X \to Y) \mapsto (C_0(Y) \ni g \mapsto g \circ f \in C_b(X)).\end{gathered}$$

Dieser identifiziert **komC*Alg** mit $\mathbf{lcHS}^{\mathrm{op}}$. In dem Sinn ist eine nicht-kommutative C*-Algebra ein nicht-kommutativer lokal kompakter Hausdorff-Raum. Nun gilt es auch andere Begriffe der Topologie auf nicht-kommutative Räume zu verallgemeinern. Wir beginnen mit den Produkträumen. Dazu müssen wir allerdings noch zwei weitere Intermezzi einlegen.

2.4 Intermezzo: Eine universelle Darstellung

In diesem Abschnitt betrachten wir Darstellungen von C*-Algebren. Es sei darauf hingewiesen, dass dies nicht direkt mit der Darstellung von Gruppen zusammenhängt. Vielmehr ist die richtige Verallgemeinerung der Darstellung von Gruppen komplizierter und kommt hier nicht vor.

Definition 18 (Begriffe in der Darstellungstheorie)**.** Es sei A eine C*-Algebra. Eine **Darstellung** (H, φ) besteht aus einem Hilbertraum H und einem $*$-Homomorphismus $\varphi : A \to B(H)$. Die Darstellung heißt **nicht-degeneriert**, wenn $[AH] = H$. Dabei ist

$$[AH] = \overline{\operatorname{span}}\,\{\varphi(a)h : a \in A, h \in H\}\,.$$

Die Darstellung heißt **zyklisch**, falls es ein $x \in H$ gibt mit $[Ax] = H$. Dabei nennt man x einen **zyklischen Vektor** von (H, φ) und es ist

$$[Ax] = \overline{\operatorname{span}}\,\{\varphi(a)x : a \in A\}\,.$$

Einen abgeschlossenen Unterraum H' nennt man **invariant**, wenn $\varphi(A)H' \subset H'$ gilt. Weiter ist eine **Unterdarstellung** (H', φ') von (H, φ) nichts anderes als ein invarianter Unterraum H' zusammen mit einem Morphismus $\varphi' : A \to B(H')$, wobei $\varphi'(a)h' = \varphi(a)h'$ für alle $a \in A$ und $h' \in H'$ gilt.

Trivialer weise sind zyklische Darstellungen nicht-degeneriert. Es gibt noch den Begriff von irreduziblen Darstellungen. Dieser erweist sich aber als unbrauchbar für unsere Belange.

Satz 19 (nicht-degenerierte Darstellungen)**.** *Es sei A eine C*-Algebra und (H, φ) eine Darstellung. Diese ist genau dann nicht-degeneriert, wenn für eine (und damit für alle) Approximationen der Eins $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von A*

$$\varphi(e_\lambda)\, x \to x$$

für alle $x \in H$ gilt. Ist A unitär, dann heißt dies nichts anderes als das φ unitär ist.

Beweis. Wir beginnen mit dem Spezialfall, für den A unitär ist, weil er im Vortrag vorkommen wird. Man beachte, dass

$$[AH] = \varphi(1)H$$

gilt. Weil $\varphi(1)$ eine Projektion ist, folgt die Behauptung.

Sei nun A beliebig. Die eine Richtung ist trivial. Sei nun also $[AH] = H$. Sei nun $x \in H$. Dann gibt es ein $a \in A$ und ein $y \in H$, sodass ay nahe x ist (sagen wir mit einem Fehler $< \epsilon$). Da aber $e_\lambda a \to a$ gilt und $e_\lambda x$ nahe $e_\lambda ay$ ist (immer noch mit einem Fehler $< \epsilon$), approximiert auch $e_\lambda x$ den Wert x für große λ (mit einem Fehler $< 3\epsilon$). □

Definition 20 (Direkte Summe von Darstellungen)**.** Es seien (H_i, φ_i) für $i \in I$ Darstellungen. Dann definiert man

$$\bigoplus_{i\in I} (H_i, \varphi_i) = \left(\bigoplus_{i\in I} H_i, \bigoplus_{i\in I} \varphi_i\right)$$

und nennt dies die **direkte Summe** der Darstellungen.

Satz 21 (Zerlegung in Darstellungen)**.** *Es sei (H, φ) eine Darstellung von A. Dann findet man eine Zerlegung*

$$(H, \varphi) = (H_0, \varphi_0) \oplus \bigoplus_{i\in I} (H_i, \varphi_i)\,,$$

wobei $\varphi_0 = 0$ und (H_i, φ_i) zyklisch ist.

Beweis. Wir geben zuerst einen Beweis für unitäre Algebren. Es ist $P = \varphi(1)$ eine Projektion auf H. Dann zerlegt sich

$$(H, \varphi) = (H_0, \varphi_0) \oplus (H', \varphi')\,.$$

Dabei sind $H_0 = \ker P$ und $H' = P(H)$ trivialerweise invariante Unterräume. Damit ist aber $\varphi_0 = 0$ und (H', φ') eine nicht-degenerierte Darstellung.

Wegen dem Lemma von Zorn muss man nur wissen, dass man eine zyklische Darstellung abspalten kann. Es sei dazu $x \in H'$ ein beliebiger normierter Vektor. Dann ist $[Ax]$ natürlich invariant. Weiter ist auch das orthogonale Komplement H'' von $[Ax]$ invariant. Sei dazu $y \in H'$ orthogonal zu $[Ax]$. Dann gilt für $a, b \in A$

$$\langle \varphi(a)y, \varphi(b)x \rangle = \langle y, \varphi\left(a^* b\right) x \rangle = 0.$$

Damit ist auch $[Ay] \subset H''$ und wir haben die Behauptung bewiesen.

Wir haben die 1 nur an zwei Stellen benutzt. Zum einen, um $x \in [Ax]$ zu zeigen (hier reicht auch eine Approximation der Eins!) und zum anderen um die triviale Unterdarstellung abzusondern. Dies können wir aber auch anders machen. Wir betrachten dazu

$$H' = [AH].$$

Es ist H' natürlich invariant. Weiter gilt $[AH'] = H'$ (also ist die von H' induzierte Unterdarstellung nicht-degeneriert). Dies zeigt man wie im Beweis zu Satz 19 mit einer Approximation der Eins. Es sei H_0 das orthogonale Komplement. Dann ist aber

$$\langle \varphi(a)x, y \rangle = \langle x, \varphi(a^*)y \rangle = 0$$

für $a \in A$, $x \in H_0$ und $y \in H'$. Damit H_0 invariant und wegen $H' = [AH]$ auch $\varphi(A)H_0 = 0$. □

Definition 22 (unitäre Äquivalenz)**.** Zwei Darstellungen (H_1, φ_1) und (H_2, φ_2) nennt man **unitär äquivalent**, wenn es eine unitäre Abbildung $u : H_1 \to H_2$ mit $u\varphi_1(\cdot) = \varphi_2(\cdot)u$ gibt. Sind zwei zyklische Darstellungen (H_1, φ_1) und (H_2, φ_2) mit ausgezeichneten zyklischen Vektoren x_1, x_2 gegeben, so nennt man diese **unitär äquivalent** wenn zusätzlich $u(x_1) = x_2$ gilt.

Wir benötigen im folgenden, dass die zyklischen Darstellungen mit ausgezeichnetem zyklischen Vektor modulo unitärer Äquivalenz eine Menge bilden. Dies ist nicht total offensichtlich. Es reicht dafür zu zeigen, dass die Kardinalität von H beschränkt ist. Diese ist aber in der Tat beschränkt, weil $[Ax] = H$ für den zyklischen Vektor x sein muss. Es kann also H nicht mächtiger als $A^{\mathbb{N}}$ sein. Damit ist die Aussage zur Mengenbehauptung klar.

Definition 23 (universelle nicht-degenerierte Darstellung)**.** Es sei $(H_\lambda, \varphi_\lambda)$ mit $\lambda \in \Lambda$ ein Vertretersystem aller zyklischen invarianten Darstellungen mit ausgezeichneten normierten zyklischen Vektoren modulo unitärer Äquivalenz. Dann nennt man

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (H_\lambda, \varphi_\lambda)$$

eine **universelle Darstellung** der C*-Algebra.

Letztlich kapselt diese Darstellung alle Darstellungen gleichzeitig. Dies ist der Gegenstand des folgenden trivialen Satzes.

Satz 24 (Die universelle Darstellung ist universell)**.** *Es sei (H, π) eine universelle Darstellung und (K, φ) eine beliebige andere Darstellung. Dann gibt es eine lineare stetige Abbildung $T : H \to K$ mit $T\pi(\cdot)T^* = \varphi(\cdot)$.*

Beweis. Wir können davon ausgehen, dass

$$(K, \varphi) = (K_0, \varphi_0) \oplus \bigoplus_{i \in I} (K_i, \varphi_i)$$

mit $\varphi_0 = 0$ und (H_i, φ_i) zyklisch. Sei nun

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (H_\lambda, \pi_\lambda)$$

eine universelle Darstellung. Sortiert man nun

$$\bigoplus_{i \in I} (K_i, \varphi_i) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \bigoplus_{i \in I_\lambda} (K_i, \varphi_i),$$

wobei (K_i, φ_i) für $i \in I_\lambda$ zu (H_λ, π_λ) unitär äquivalent ist. Sei nun $u_i : H_\lambda \to K_i$ die dafür nötige unitäre Abbildung. Setzt man nun diese Abbildungen zu T zusammen, dann erhält man die Behauptung. □

Wir werden im nächsten Abschnitt eine Beweisskizze dafür geben, dass die Abbildung π von der universellen Darstellung injektiv und isometrisch ist.

2.5 Intermezzo: GNS-Konstruktion

Wir werden sehen, dass sich jede C*-Algebra als normabgeschlossene Unter- $*$-Algebra von $B(H)$ für einen Hilbertraum H realisieren lässt. Weiter sehen wir, dass die universelle Darstellung (H,π) **treu** ist (d.h. π ist injektiv). Der zentrale Begriff an dieser Stelle sind die Zustände.

Definition 25 (Zustände)**.** Eine lineare Abbildung $\varphi : A \to \mathbb{C}$ heißt **positiv**, falls für jedes $a \in A^+$ auch $\varphi(a) \geq 0$ ist. Die positiven linearen Abbildungen sind automatisch stetig wie wir sehen werden. Man nennt eine positive lineare Abbildung φ einen **Zustand**, falls $\|\varphi\| = 1$ ist. Die Menge der Zustände wird mit $S(A)$ bezeichnet.

Beispiel. Ein wichtiges (sogar das einzige!) Beispiel von Zuständen ist wie folgt gegeben. Es sei $\varphi : A \to H$ eine zyklische Darstellung und x ein zyklischer Einheitsvektor. Dann ist

$$a \mapsto \langle \varphi(a)x, x\rangle$$

ein Zustand, wie man leicht nachrechnet. Zwei solche zyklische Darstellungen mit ausgezeichneten normierten zyklischen Vektoren sind genau dann unitär äquivalent, wenn die Zustände identisch sind. Die eine Richtung ist trivial. Seien nun (H,φ) und (K,π) zwei Darstellungen mit ausgezeichneten zyklischen Vektoren x, y und

$$\langle \varphi(a)x, x\rangle = \langle \pi(a)y, y\rangle$$

für alle $a \in A$. Dann definiert $u : \varphi(a)x \mapsto \pi(a)y$ eine unitäre Abbildung $H \to K$. Es ist dabei nur zu beweisen, dass u nicht von der Wahl von $a \in A$, sondern nur von $\varphi(a)x$ abhängt. Dies ist aber offensichtlich, weil wegen

$$\langle \varphi(a)x, \varphi(b)x\rangle = \langle \pi(a)y, \pi(b)y\rangle$$

für alle $a, b \in A$ der Wert $\pi(a)y$ bereits durch $\varphi(a)x$ bestimmt ist. Weiter rechnet sich leicht nach, dass $u\varphi = \pi u$ gilt. Das ist die Behauptung.

Lemma 26. *Eine positive lineare Abbildung ist stetig. Deshalb nennt man positive lineare Abbildungen auch positive Funktionale.*

Beweis. Wäre $\varphi : A \to \mathbb{C}$ positiv und unstetig, dann gibt es wegen der linearen Dichtheit von A^+ eine Folge $a_n \in A^+$ mit $\|a_n\|= 1$ und

$$\varphi(a_n) > 4^n.$$

Dann ist, weil A^+ ein abgeschlossener Kegel ist,

$$\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} a_n \in A^+$$

für $m \in \mathbb{N}$. Es ist aber nun

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n\right) \geq \varphi\left(2^{-n} a_n\right) > 2^n.$$

□

Man kann außerdem mit der Zerlegung $a = \operatorname{Re}(a)^+ - \operatorname{Re}(a)^- + i \operatorname{Im}(a)^+ - i \operatorname{Im}(a)^-$ ganz einfach das folgende Lemma zeigen.

Lemma 27 (positive Funktionale und die $*$-Abbildung)**.** *Es sei φ ein positives Funktional. Dann ist*

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$$

für alle $a \in A$.

Wenn man beachtet, dass $\tau(a^*b)$ eine positiv definite Bilinearform ist, dann lassen sich aus der CSU schnell folgende Ungleichungen zeigen (für die zweite eine Approximation der Eins statt b benutzen!).

Lemma 28 (CSU)**.** *Es sei τ ein positives Funktional auf A dann gilt für $a, b \in A$*

$$|\tau(a^*b)|^2 \leq \tau(a^*a)\tau(b^*b).$$

Weiter gilt auch

$$|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\|\tau(a^*a).$$

Beispiel. Wir wollen nun zeigen, dass alle Zustände von zyklischen Darstellungen kommen. Damit gäbe es eine Bijektion zwischen Zuständen und zyklischen Darstellungen mit ausgezeichneten zyklischen normierten Vektoren modulo unitärer Äquivalenz. Sei dazu τ ein Zustand auf A. Dann definiert

$$(a,b) \mapsto \tau(a^*b)$$

eine symmetrische stetige und positiv semidefinite Bilinearform auf A. Damit induziert dies auf A/N_τ mit

$$N_\tau = \{a \in A : \ \tau(a^*a) = 0\}$$

ein Skalarprodukt. Man beachte, dass N_τ ein abgeschlossenes Linksideal von A ist. Die Abgeschlossenheit ist wegen der Stetigkeit klar. Die Idealeigenschaft folgt aus der CSU mittels

$$\tau(a^*a) = 0 \Leftrightarrow \forall b \in A : \ \tau(a^*b) = 0.$$

Damit definiert aber für $a \in A$

$$\varphi_\tau(a) : A/N_\tau \to A/N_\tau \quad \varphi_\tau(a)b = ab$$

(Man schreibt ausführlich $\varphi_\tau(a)b + N_\tau = ab + N_\tau$. In der Algebra ist üblich das weg zu lassen, weswegen ich das hier auch tue) einen $*$-Homomorphismus φ_τ. Vervollständigt man A/N_τ bezüglich $\tau((\cdot)^*\cdot)$, dann wird φ_τ eine Darstellung. Ist A unitär, dann ist klar, dass diese Darstellung zyklisch ist. Ansonsten muss man den Darstellungssatz von Riesz auf

$$A/N_\tau \ni a \mapsto \tau(a)$$

anwenden. Dann bekommt man einen normierten Vektor x mit

$$\tau(x^*a) = \langle x, a\rangle = \tau(a).$$

Damit ist aber $\varphi_\tau(b)x = b$ (dies sieht man leicht mit $\langle \varphi_\tau(b)x, a\rangle = \tau(x^*b^*a) = \tau(b^*a) = \langle b, a\rangle$) und der Vektor damit zyklisch.

In einem nächsten Schritt werden wir zeigen, dass die Zustände trennend sind. Dazu müssen wir wissen, wie man Zustände erkennt.

Lemma 29 (Zustände erkennen am Wert von Eins)**.** *Ein lineares Funktional $\tau : A \to \mathbb{C}$ mit $\|\tau\| = 1$ ist genau dann ein Zustand, wenn $\tau(e_\lambda) \to 1$ geht für eine oder äquivalent für alle Approximationen (e_λ) der Eins.*

Beweis. Es sei A vorerst unitär und τ. Dann ist $\tau(1) \le 1$. Sei nun $\tau(a) \ge 1 - \epsilon$ mit $\|a\| = 1$, dann gilt

$$1 - \epsilon \le |\tau(1a)| \le_{\text{CSU}} \tau(1)\tau(a^*a) \le \tau(1).$$

Damit ist also $\tau(1) = 1$.

Sei auf der anderen Seite $\tau(1) = 1$. Wir zeigen, dass für selbstadjungierte $a \in A$ auch $\tau(a) \in \mathbb{R}$ gilt. Es sei $\tau(a) = \lambda + i\mu$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist für $n \in \mathbb{Z}$

$$|\tau(a + in)|^2 = \lambda^2 + (\mu + n)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + n^2 + 2\mu n.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$|\tau(a + in)|^2 \le \|a - ni\|^2 = \|(a - ni)(a + ni)\| = \|aa + n^2 + in(a - a)\| \le \|a\|^2 + n^2.$$

Damit gilt aber

$$\lambda^2 + \mu^2 + n^2 + 2\mu n \le \|a\|^2 + n^2$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dies kann aber nur gelten, wenn $\mu = 0$ ist. Sei nun $a \in A$ positiv, dann ist $\|a\| - a$ selbstadjungiert und $\|\|a\| - a\| \le \|a\|$. Dann ist aber $\mathbb{R} \ni \tau(\|a\| - a) \le \|a\|$. Damit ist aber $\tau(a) \ge 0$.

Der allgemeine Fall geht mit einer Approximation der Eins fast völlig analog. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen. □

Satz 30 (Zustände trennen Selbstadjungierte von Null)**.** *Es sei* τ *ein Zustand auf einer C*-Algebra* B *, welche eine C*-Unteralgebra von* A *ist. Dann kann man* τ *zu einem Zustand auf* A *erweitern. Insbesondere gibt es zu einem selbstadjungierten Element* $a \in A\backslash\{0\}$ *einen Zustand* τ *auf* A *mit* $|\tau(a)| = \|a\|$ *.*

Beweis. Ohne Einschränkung sind A und B unitär mit der gleichen 1 . Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach gibt es ein lineares Funktional τ von Norm 1 auf A , welches auf B mit dem gegebenen übereinstimmt. Wegen $\tau(1) = 1$ folgt dann die Behauptung. Der Zusatz ist einfach. Dann kann man nämlich einfach auf $C^*(1, a)$ einen solchen konstruieren (Punktauswertung!) und diesen fortsetzen. □

Theorem 31 (GNS-Konstruktion)**.** *Die universelle Darstellung ist gegeben durch*

$$\bigoplus_{\tau \in S(A)} (H_\tau, \varphi_\tau).$$

Dabei ist $H_\tau = \overline{A/N_\tau}$ *die Vervollständigung von* A/N_τ *bezüglich des Skalarproduktes* $\tau((\cdot)^* \cdot)$ *,* $N_\tau = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\}$ *und* $\varphi_\tau(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau$ *für* $b \in A$ *auf* H_τ *fortgesetzt. Diese Darstellung ist treu.*

Beweis. Aus den vorhergehenden Beispielen ist klar, dass dies die universelle Darstellung ist. Wir haben nur zu zeigen, dass dies treu ist. Sei dazu $a \in A$ und $\varphi_\tau(a) = 0$ für alle τ . Es gibt aber einen Zustand τ mit $\tau(aa^*) = \|a\|^2$. Damit ist aber

$$\varphi_\tau(a) = 0 \Rightarrow a \in N_\tau.$$

Dies ist trivial, wenn A unitär ist. Ist A nicht unitär, so folgt dies mit der Approximation der Eins und der Tatsache, dass N_τ ein abgeschlossenes Ideal ist. Damit folgt aber $\tau(a^*a) = 0$, was $a = 0$ bedeutet. Also ist die Darstellung treu. □

2.6 Intermezzo: Tensorprodukte

Das Grundgerüst bilden die Tensorprodukte von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Diese bezeichnen wir hier zur Unterscheidung von den später auftauchenden Tensorprodukten auf C*-Algebren und Hilberträumen als algebraische Tensorprodukte. Wir lassen an dieser Stelle das ganze Bollwerk der Algebra fallen und wählen einen koordinatenbehafteten Zugang zum algebraischen Tensorprodukt. An der Stelle sei gewarnt, dass nicht alle Tensorprodukte aus der Algebra von so einfacher Gestalt sind!

Definition 32 (algebraisches Tensorprodukt - spezieller Fall)**.** Es seien V, W $\mathbb{C}$-Vektorräume. Es sei $(v_i, i \in I)$ eine Basis von V und $(w_j, j \in J)$ eine Basis von W . Wir bezeichnen einen Vektorraum mit der Basis - das folgende vorerst nur als Bezeichnung für die Basiselemente zu verstehen - $(v_i \otimes w_j, (i, j) \in I \times J)$ mit dem Symbol $V \odot W$. Dabei zeichnen wir stets die durch

$$\cdot \otimes \cdot : V \times W \to V \odot W \quad (v_i, w_j) \mapsto v_i \otimes w_j$$

induzierte bilineare Abbildung aus. $V \odot W$ zusammen mit dieser bilinearen Abbildung $(v, w) \mapsto v \otimes w$ nennen wir das algebraische **Tensorprodukt** von V und W . Sind A und B $\mathbb{C}$ -Algebren (mit Involution bzw. mit Eins), so definieren die linearen Fortsetzungen von

$$(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$$

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$$

eine $\mathbb{C}$ -Algebrastruktur (mit Involution bzw. mit Eins) auf $A \otimes B$.

Wenn wir nun mit einem komplexen Hilbertraum starten, ist es wünschenswert, dass das Tensorprodukt auch wieder ein Hilbertraum ist. Dies leistet das algebraische Tensorprodukt nicht. Wir haben deshalb ein anderes Tensorprodukt zu betrachten.

Definition 33 (Tensorprodukt von Hilberträumen)**.** Es seien H_1, H_2 Hilberträume, dann definiert die lineare Fortsetzung von

$$(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) := (v_1, w_1)\,(v_2, w_2)$$

für $v_1, w_1 \in H_1$ und $v_2, w_2 \in H_2$ ein Skalarprodukt auf $H_1 \odot H_2$. Die Vervollständigung von $H_1 \odot H_2$ bezüglich dieses Skalarproduktes bezeichnen wir mit $H_1 \otimes H_2$ und nennen dies zusammen mit der stetigen Bilinearform $\cdot \otimes \cdot$ das **Tensorprodukt** der Hilberträume H_1 und H_2 .

Wie dem Leser bereits aufgefallen sein dürfte, werden multilineare Abbildungen nur auf den Elementen $h_1 \otimes h_2$ angegeben. Diese liegen linear dicht (oder spannen im algebraischen Fall den Raum auf) im Tensorprodukt. Es gibt also höchstens eine stetige Abbildung zwischen diesen. Es reicht deshalb aus, die Abbildungen auf diesen **Elementartensoren** anzugeben. Es sei $(e_i, i \in I)$ eine ONB für H_1 und $(f_j, j \in J)$ eine ONB für H_2 . Dann sieht man schnell, dass auch $(e_i \otimes f_j, (i,j) \in I \times J)$ eine ONB für $H_1 \otimes H_2$ ist.

Beispiel. Es sei X eine Menge und H ein Hilbertraum mit einer ONB $(e_i)_{i \in I}$. Dann sind aber

$$\ell^2(X \times I) \simeq \ell^2(X, H) \simeq \ell^2(X) \otimes H.$$

kanonisch isomorph. Es gilt nun auch für Radonmaße μ und λ

$$L^2(\lambda) \otimes L^2(\mu) \simeq L^2(\lambda \times \mu).$$

Nun ergibt sich noch das folgende sehr zentrale Lemma.

Lemma 34. *Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $T : H_1 \to H_1$ und $S : H_2 \to H_2$ beschränkte lineare Abbildungen, dann definiert $(T \otimes S)(h_1 \odot h_2) = T(h_1) \odot S(h_2)$ für $h_1 \in H_1$ und $h_2 \in H_2$ einen beschränkten linearen Operator auf $H_1 \otimes H_2$. Es gibt also eine kanonische $*$-Einbettung*

$$B(H_1) \odot B(H_2) \to B(H_1 \otimes H_2) \quad (T, S) \mapsto T \otimes S.$$

Weiter gilt $\|T \otimes S\| = \|T\|\|S\|$.

Beweis. Trivialerweise gilt $\|T \otimes S\| \geq \|T\|\|S\|$. Es reicht also, um die gesamte Aussage zu zeigen, dass wir

$$\|T \otimes S\| \leq \|T\|\|S\|$$

beweisen. Dafür reicht es aber

$$\|T \otimes \mathrm{id}\| \leq \|T\|$$

zu zeigen (entsprechendes mit $T = \mathrm{id}$ und S beliebig gilt aus Symmetriegründen dann auch). Denn mit

$$\|T \otimes S\| = \|(T \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes S)\| \leq \|T \otimes \mathrm{id}\|\|\mathrm{id} \otimes S\| \leq \|T\|\|S\|$$

folgt die Behauptung.

Wir zeigen also nun, dass $\|T \otimes \mathrm{id}\| \leq \|T\|$ gilt. Es reicht diese Normungleichung für den Operator auf dem algebraischen Tensorprodukt zu zeigen. Wir bezeichnen mit $T \otimes \mathrm{id}$ auch die induzierte Abbildung auf dem algebraischen Tensorprodukt. Sei nun $y = \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i$ ein beliebiges Element aus $H_1 \odot H_2$. Dabei können wir annehmen, dass $e_1, ..., e_n$ orthonormal sind. Es ist nun

$$(T \otimes \mathrm{id}) \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i \right) = \sum_{i=1}^n T(x_i) \otimes e_i.$$

Wegen der Orthogonalität der Elemente $T(x_i) \otimes e_i$ folgt

$$\|(T \otimes \mathrm{id})\,(y)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^2 \leq \|T\|^2 \|y\|^2. \qquad \square$$

Über die GNS-Konstruktion und dieses Lemma lässt sich nun ein Tensorprodukt von C*-Algebren definieren. Dieses wird das minimale oder räumliche Tensorprodukt genannt. Wir aber sprechen einfach von dem Tensorprodukt, da wir keine anderen auf C*-Algebren betrachten.

Definition 35 (räumliches Tensorprodukt)**.** Es seien A und B zwei C*-Algebren. Weiter seien H_A und H_B die Hilberträume aus der GNS-Konstruktion und $A \to B(H_A)$ und $B \to B(H_B)$ die isometrischen $*$-Einbettungen aus der GNS-Konstruktion. Dann gibt es eine $*$-Einbettung

$$A \odot B \to B(H_A \otimes H_B).$$

Wir definieren $A \otimes B$ als den Abschluss von $A \odot B$ in $B(H_A \otimes H_B)$ und nennen dies zusammen mit der stetigen Bilinearform $\cdot \otimes \cdot$ das **(räumliche) Tensorprodukt** von A und B.

Beispiel. Für jede C*-Algebra A gibt es einen kanonischen Morphismus $A \simeq A \otimes \mathbb{C}$. Weiter gibt es einen kanonischen Isomorphismus (welchen wir als Identifikation benutzen)

$$A \otimes (B \otimes C) \simeq (A \otimes B) \otimes C$$

für alle C*-Algebren A, B und C.

Wir benötigen für das folgende - und dies ist wirklich essenziell - einige wichtige Eigenschaften dieses Tensorprodukts. Die erste Eigenschaft beantwortet eine sehr natürliche Frage.

Theorem 36 (Das Tensorprodukt ist funktoriell)**.** *Es seien $\varphi_1 : A_1 \to B_1$ und $\varphi_2 : A_2 \to B_2$ zwei $*$-Homomorphismen. Dann gibt es genau einen $*$-Homomorphismus $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : A_1 \otimes A_2 \to B_1 \otimes B_2$, welcher $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(a_1 \otimes a_2) = \varphi_1(a_1) \otimes \varphi_2(a_2)$ erfüllt.*

Beweis. Es definiert dies vorerst einen eindeutigen $*$-Homomorphismus (funktorielle Eigenschaft des algebraischen Tensorproduktes)

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 : A_1 \odot A_2 \to B_1 \otimes B_2.$$

Damit fehlt nur noch die Stetigkeit von diesem Morphismus. Im nächsten Theorem werden wir zeigen, dass

$$\|c\| = \sup_{\substack{\sigma \in S(A_1) \\ \tau \in S(A_2)}} \|(\varphi_\sigma \otimes \varphi_\tau)(c)\|.$$

für ein $c \in A_1 \odot A_2$ gilt. Entsprechend gilt auch

$$\|(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(c)\| = \sup_{\substack{\sigma \in S(B_1) \\ \tau \in S(B_2)}} \|(\varphi_\sigma \otimes \varphi_\tau)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(c)\| = \sup_{\substack{\sigma \in S(B_1) \\ \tau \in S(B_2)}} \|((\varphi_\sigma \circ \varphi_1) \otimes (\varphi_\tau \circ \varphi_2))(c)\|.$$

Es sind aber $\varphi_\sigma \circ \varphi_1$ und $\varphi_\tau \circ \varphi_2$ Darstellungen. Diese lassen sich als direkte Summe von zyklischen Darstellungen ausrücken. Die Norm ist dann aber das Supremum der Normen aller direkter Summanden (siehe auch Beweis vom nächsten Theorem). All diese Normen tauschen aber im Supremum zur Berechnung von $\|c\|$ auf. Damit gilt

$$\|(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(c)\| \leq \|c\|.$$

□

Man kann die Norm eines algebraischen Tensors auch „ausrechnen“. Dies haben wir im vorigen Theorem gebraucht und werden wir wieder brauchen.

Theorem 37 (Norm von algebraischen Tensoren)**.** *Es sei $c \in A \odot B \subset A \otimes B$. Dann ergibt sich*

$$\|c\| = \sup_{\substack{\sigma \in S(A) \\ \tau \in S(B)}} \|(\varphi_\sigma \otimes \varphi_\tau)(c)\|.$$

Beweis. Es seien $\varphi : A \to B(H)$ und $\tilde{\varphi} : B \to B(K)$ die universellen Darstellungen. Dann gilt

$$(H, \varphi) \simeq \bigoplus_{\sigma \in S(A)} (H_\sigma, \varphi_\sigma) \quad (K, \tilde{\varphi}) \simeq \bigoplus_{\tau \in S(B)} (H_\tau, \varphi_\tau).$$

Dies aber impliziert einen $*$-Homomorphismus

$$\bigoplus_{\substack{\sigma \in S(A) \\ \tau \in S(B)}} (\varphi_\sigma \otimes \varphi_\tau) : A \odot B \to B\left(\bigoplus_{\substack{\sigma \in S(A) \\ \tau \in S(B)}} (H_\sigma \otimes H_\tau) \right).$$

Damit ist aber, wie man leicht nachrechnet (dies ist wie eine diagonalgeblockte Matrix!)

$$\|c\| = \sup_{\substack{\sigma \in S(A) \\ \tau \in S(B)}} \|(\varphi_\sigma \otimes \varphi_\tau)(c)\|.$$

Dies ist die Behauptung. □

Um die aus diesem Theorem die nächste gute Eigenschaft zu beweisen, benötigen wir ein Lemma.

Lemma 38 (Approximation der Eins und Tensorprodukt)**.** *Es sei* $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *eine Approximation der Eins in* A *und* $(f_\mu)_{\mu\in M}$ *eine Approximation der Eins in* B *. Dann ist*

$$(e_\lambda \otimes f_\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$$

eine Approximation der Eins in $A\otimes B$ *.*

Beweis. Natürlich ist $\Lambda \times M$ mit

$$(\lambda,\mu) \leq (\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) \Leftrightarrow \lambda \leq \tilde{\lambda} \text{ und } \mu \leq \tilde{\mu}$$

eine gerichtete Menge. Auf den Elementartensoren ist dies trivialerweise eine Approximation der Eins. Dann ist dies aber auch auf $A\otimes B$ eine Approximation der Eins. □

Theorem 39 (Tensorprodukt von Zuständen)**.** *Es seien* $\sigma : A \to \mathbb{C}$ *und* $\tau : B \to \mathbb{C}$ *Zustände. Dann gibt es genau ein Funktional* $\sigma\otimes\tau : A\otimes B \to \mathbb{C}$ *mit* $(\sigma\otimes\tau)(a\otimes b) = \sigma(a)\tau(b)$ *für alle* $a\in A$ *und* $b \in B$ *und dieses ist ein Zustand.*

Beweis. Wir haben nur zu zeigen, dass

$$\sigma\otimes\tau : A\odot B \to \mathbb{C}$$

stetig ist mit $\|\sigma\otimes\tau\| \leq 1$. Wenn wir dies bewiesen haben, dann dehnt sich dieses Funktional eindeutig und stetig aus. Sei dann weiter $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Approximation der Eins in A und $(f_\mu)_{\mu\in M}$ eine Approximation der Eins in B . Dann ist

$$(e_\lambda \otimes f_\mu)_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$$

eine Approximation der Eins in $A\otimes B$ und damit folgt

$$(\sigma\otimes\tau)(e_\lambda\otimes f_\mu) = \sigma(e_\lambda)\tau(f_\mu) \to 1.$$

Damit ist $\sigma\otimes\tau$ tatsächlich ein Zustand.

Um die Stetigkeit von

$$\sigma\otimes\tau : A\odot B \to \mathbb{C}$$

zu zeigen beachte man, dass man $\sigma(a) = \langle\varphi_\sigma(a)x_\sigma, x_\sigma\rangle$ und $\tau(b) = \langle\varphi_\tau(b)x_\tau, x_\tau\rangle$ schreiben kann. Dabei ist φ_τ und φ_σ die zyklische Darstellung, welche zu τ bzw. σ gehört und x_τ bzw. x_σ zyklische normierte Vektoren. Man erhält damit aber

$$(\sigma\otimes\tau)(c) = \langle(\varphi_\sigma\otimes\varphi_\tau)(c)(x_\sigma\otimes x_\tau), x_\sigma\otimes x_\tau\rangle\,.$$

Man erhält damit aber

$$\|(\sigma\otimes\tau)(c)\| \leq \|c\|.$$

Dies ist die Behauptung. □

Der Leser ist nun in der Lage auch zu beweisen, dass man $\mathrm{id}\otimes\tau : A\otimes A \to A$ für einen Zustand τ bilden kann. Dies ist ein kleines Resultat, welches wir dem Leser zur Übung überlassen. Dies ist nicht besonders schwer (siehe obige Beweise!). Dies werden wir später benutzen.

Diese Definition ist äußerst unpraktikabel. Das nächste Theorem, welches einiges an Rechnung erfordert und ein Beweis deshalb hier ausgelassen werden soll, macht das räumliche Tensorprodukt Berechnungen zugänglich.

Theorem 40 (Einfache Berechnung des räumlichen Tensorprodukts)**.** *Es seien* $A \to B(H)$ *und* $B \to B(K)$ *treue Darstellungen. Dann ist* $A\otimes B$ *kanonisch isomorph zur Vervollständigung von* $A\odot B$ *in* $B(H\otimes K)$ *.*

Mit diesem Theorem zur Hand können wir einige nette Dinge zeigen. Wir wissen bereits, dass das Tensorprodukt funktoriell für $*$-Homomorphismen ist. Die Frage, welche sich nun stellt, ob dies auch für Morphismen gültig ist, bejaht dieses Lemma.

Lemma 41 (Tensorprodukt und Multiplieralgebren - noch mehr Funktorialität). *Es seien A, B C*-Algebren. Dann gibt es eine kanonische $*$-Einbettung $\mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A \otimes B)$. Insbesondere ist das Tensorprodukt auch für Morphismen funktoriell.*

Beweis. Es sei $A \to B(H)$ eine treue nicht-degenerierte Darstellung. Wir haben zu zeigen, dass $\mathcal{M}(A) = C$ ist. Dabei ist

$$C = \{T \in B(H) : \ Ta, aT \in A \ \forall a \in A\} .$$

Dazu rechnen wir die universelle Eigenschaft nach. Es sei B eine C*-Algebra, welche A als Ideal und C*-Unteralgebra enthält. Dann ist aber

$$f : B \to C \quad b \mapsto (ah \mapsto (ba)h)$$

eine eindeutig bestimmte Abbildung, weil AH dicht in H ist. Dieser entspricht auf A der Identität. Sei nun

$$g : B \to C$$

ein $*$-Homomorphismus, welcher auf A die Identität ist. Dann ist aber

$$g(b)ah = g(ba)h = (ba)h$$

für alle $a \in A$ und $h \in H$. Aus $[AH] = H$ folgt nun $g(b) = f(b)$. Damit ist $\mathcal{M}(A) = C$ gezeigt. Wir haben also das unten stehende Korollar gezeigt.

Wir kehren nun zum Theorem zurück. Es seien

$$A \to B(H) \quad B \to B(K)$$

die universellen Darstellungen. Dann dehnen sich diese aus zu zwei treuen Darstellungen

$$\mathcal{M}(A) \to B(H) \quad \mathcal{M}(B) \to B(K)$$

aus. Damit ist weiter $\mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{M}(B)$ eine C*-Algebra, welche $A \otimes B$ als Unteralgebra enthält. Diese ist dort auch ein Ideal, wie man leicht nachrechnet. Damit ist $\mathcal{M}(A \otimes B)$ eine Ober-C*-Algebra von $\mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{M}(B)$ in $B(H \otimes K)$. □

Wir haben auch folgendes Korollar gezeigt.

Korollar 42 (Multiplieralgebra und nicht-degenerierte Darstellungen). *Es sei $A \to B(H)$ eine nicht-degenerierte und treue Darstellung. Dann ist $\mathcal{M}(A)$ isomorph zu der C*-Unteralgebra*

$$\mathcal{I}(A) = \{T \in B(H) : \ Ta, aT \in A \ \forall a \in A\}$$

von $B(H)$, welcher der Idealisator von A in $B(H)$ genannt wird.

2.7 Produkträume

Um die $C_0(X \times Y)$ mit dem Tensorprodukt zu identifizieren müssen wir einen Normvergleich vornehmen. Dieser wird gegeben durch folgendes Lemma.

Lemma 43 (Injektive $*$-Homomorphismen). *Es sei $\varphi : A \to B$ ein injektiver $*$-Homomorphismus von C*-Algebren, dann ist φ isometrisch.*

Beweis. Wir können annehmen, dass A und B unitär sind. Weiter reicht es wegen der C*-Identität

$$\|a^*a\| = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\|$$

zu zeigen. Wir können also A als unitär voraussetzen. Weiter kann man B durch den Abschluss von $\varphi(A)$ ersetzen. Damit sind A und B ohne Einschränkung abelsch und unitär. Es ist also

$$\varphi = C(f) : A \simeq C(Y) \to B \simeq C(X)$$

für eine stetige Abbildung kompakter Räume $f : X \to Y$ zu untersuchen. Es ist, wovon man sich schnell überzeugt, $C(f)$ genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist. Dann ist die behauptete Identität aber

$$\|g\|_\infty = \|g \circ f\|_\infty$$

für $g \in C(Y)$. Mit der Surjektivität von f ist dies in der Tat trivial. □

Satz 44 (Produkträume und räumliche Tensorprodukte). *Es gibt eine kanonische Isomorphie*

$$C_0(X) \otimes A \simeq C_0(X, A),$$

wobei A eine C-Algebra und X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum ist. Weiter gibt es auch eine kanonische Isomorphie*

$$C_0(X) \otimes C_0(Y) \simeq C_0(X \times Y).$$

Beweis. Es ist

$$C_0(X) \to B\left(\ell^2(X)\right) \quad f \mapsto \left((\lambda_x)_{x\in X} \mapsto (f(x)\lambda_x)_{x\in X}\right)$$

eine treue Darstellung. Sei nun $\varphi : A \to B(H)$ eine treue Darstellung, dann ist

$$C_0(X, A) \to B\left(\ell^2(X, H)\right) \quad f \mapsto \left((h_x)_{x\in X} \mapsto (\varphi(f(x))h_x)_{x\in X}\right)$$

eine injektive $*$-Einbettung. Diese ist also isometrisch. Weiter ergibt sich

$$C_0(X) \odot A \to B\left(\ell^2(X, H)\right) \quad f \otimes a \mapsto \left((h_x)_{x\in X} \mapsto (f(x)ah_x)_{x\in X}\right).$$

Mit diesen Einbettungen als Identifikation ist $C_0(X) \otimes A$ eine $*$-Unteralgebra von $C_0(X, A)$ und $C_0(X) \otimes A$ besteht aus genau den stetigen Funktionen von $C_0(X, A)$, dessen Bild in einem endlichdimensionalen Unterraum liegt. Sei nun $f \in C_0(X, A)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $\|f(x)\| < \epsilon$ für alle $x \in X\backslash K$. Nun findet man zu jedem Punkt $y \in K$ einen Elementartensor $g_y = f_y \otimes a_y \in C_0(X) \otimes A$, welcher $\|g_y(x)\| < 2\epsilon$ für alle $x \in X\backslash K$ und $g_y(y) = f(y)$ erfüllt. Weiter findet man zu so einem Punkt $y \in K$ und einem g_y eine Umgebung U_y von y, in welcher g_y und f sich nur um ein $\epsilon > 0$ unterscheiden. Wegen der Kompaktheit von K reichen endlich viele $y_1, ..., y_n \in K$, sodass

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} \supset K$$

gilt. Sei nun $(e_i)_{i=0,1,...,n}$ eine stetige Partition der Eins bezüglich der U_{y_i} ($i = 1, ..., n$) und K^C. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} e_i g_{y_i}$$

eine Approximation von f mit einem Fehler von höchstens 3ϵ. Dies war die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung bekommt man, wenn man $A = C_0(Y)$ betrachtet. Dann ist aber $C_0(X, A) \simeq C_0(X \times Y)$. Genauer bekommt man einen kanonischen injektiven $*$-Homomorphismus

$$C_0(X, A) \ni f \mapsto ((x, y) \mapsto f(x)(y)) \in C_0(X \times Y).$$

Damit ist aber das Bild eine abgeschlossene punktetrennende $*$-Unteralgebra von $C_0(X \times Y)$, welche für jedes $(x, y) \in X \times Y$ auch eine Funktion f mit $f(x, y) \neq 0$ enthält. Dann folgt aber nach Stone-Weierstraß die Behauptung. □

Satz 45 (Die nicht-kommutative Produktabbildung). *Es seien $f : \Omega \to X$ und $g : \Delta \to Y$ stetige Abbildungen und $T : C_0(X) \to C_0(\Omega)$, sowie $S : C_0(Y) \to C_0(\Delta)$ die korrespondierenden Morphismen. Dann korrespondiert $f \times g : \Omega \times \Delta \to X \times Y$ zu dem Morphismus $T \otimes S : C_0(X) \otimes C_0(Y) \to C_0(\Omega) \otimes C_0(\Delta)$.*

Beweis. Es sei $(T \otimes S)(a \otimes b) = T(a) \otimes S(b)$. Damit ist

$$((T \otimes S)(a \otimes b))(\omega, \delta) = (a \circ f)(\omega) \cdot (b \circ g)(\delta) = ((a \otimes b) \circ (f \times g))(\omega, \delta).$$

Wir haben also tatsächlich (lineare Dichtheit!) nachgerechnet, dass die Produktabbildung $f \times g$ zu $T \otimes S$ korrespondiert. □

Satz 46 (Tupel von Punkten). *Es seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte in einem lokal kompakten Hausdorff-Raum und χ_x, χ_y die korrespondierenden Auswertungen auf $C_0(X)$ bzw. $C_0(Y)$. Dann korrespondiert $(x, y) \in X \times Y$ zu dem Charakter $\chi_x \otimes \chi_y$.*

Beweis. Es gilt $(\chi_x \otimes \chi_y)(f \otimes g) = f(x)g(y)$. Wegen der linearen Dichtheit der Elemente $f \otimes g$ ist die Behauptung bewiesen. □

Es ist klar (dazu auch mehr später), dass endliche Radonmaße μ aufgefasst werden können als positive Funktionale

$$f \mapsto \int f \, d\mu.$$

Weiter ist dies eine Korrespondenz zwischen endlichen Radonmaßen und positiven Funktionalen. Eine Frage, welche sich sofort aufdrängt ist, wie diese sich mit den Produkträumen vertragen.

Satz 47 (Produktmaße)**.** *Es seien μ und λ endliche Radonmaße auf X bzw. Y. Weiter seien die zugehörigen positiven Funktionale f und g. Dann korrespondiert $\mu \times \lambda$ zu $f \otimes g$.*

Beweis. Es ergibt sich aus

$$(f \otimes g)\,(a \otimes b) = \int_X \int_Y a(x)b(y)\, d\mu(x) d\lambda(y)$$

bereits die Behauptung. □

2.8 C*-Bialgebren oder lokal kompakte Quantenhalbgruppen

Definition 48 (C*-Bialgebren)**.** Eine **C*-Bialgebra** ist ein Tupel (A, Δ), welches aus einer C*-Algebra A und einem Morphismus $\Delta : A \to A \otimes A$ besteht, so dass

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

gilt. Man nennt (A, Δ) **bivereinfachbar**, falls $\Delta(A)(A \otimes 1), \Delta(A)(1 \otimes A)$ linear dicht in $A \otimes A$ sind.

Satz 49 (lokal kompakte Quantenhalbgruppen)**.** *Es gibt eine kanonische Bijektion zwischen abelschen C*-Bialgebren und lokal kompakte Halbgruppen. Deshalb nennt man nicht-kommutative C*-Bialgebren auch **lokal kompakte Quantenhalbgruppen**.*

Beweis. Es sei $A = C_0(H)$ für einen lokal kompakten Raum H. Eine Abbildung $m : H \times H \to H$ korrespondiert nach dem bereits bewiesenen zu eine Morphismus $\Delta : A \to A \otimes A$. Wir haben nur zu überprüfen, ob

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

sich in die Assoziativität übersetzt. Das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& H \times (H \times H) = (H \times H) \times H \arrow[dl, "\mathrm{id} \times m"'] \arrow[dr, "m \times \mathrm{id}"] & \\
H \times H \arrow[dr, "m"'] & & H \times H \arrow[dl, "m"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

bedeutet nichts anderes als die Assoziativität der Abbildung m. Mit dem was wir bereits gelernt haben, können wir das ganze Diagramm in den C*-algebraischen Rahmen einbetten. Die Kommutativität des Diagramms ist zu der Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes (A \otimes A) = (A \otimes A) \otimes A & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & & A \otimes A \arrow[ul, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] \\
& A \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

äquivalent. □

Beispiel. Wir haben nun gesehen, dass lokal kompakte Halbgruppen zu C*-Bialgebren führen. Wir wollen zu einer lokal kompakten Gruppe G auch noch eine andere C*-Bialgebra assoziieren. Es sei $A = C_r^*(G)$ (und in der Notation in unserem Seminar $C^*(G)$) die reduzierte Gruppen C*-Algebra (oder einfach Gruppen C*-Algebra). Wir erinnern uns, dass wir eine $*$-Einbettung

$$L : L^1(G) \ni f \mapsto \int f(x) L_x \, dx \in B(L^2(G))$$

für das linke Haarmaß dx haben, wobei das Integral in der schwachen Operatortopologie gebildet wird. Dabei ist $C_r^*(G)$ nichts anderes als die Vervollständigung von $L^1(G)$ als Unteralgebra von $B(L^2(G))$ über diese Einbettung. Wir wollen nun einen Morphismus $\Delta : C_r^*(G) \to C_r^*(G) \otimes C_r^*(G)$ definieren. Dieser ist einfach gegeben durch $\Delta(T) = \mathbb{W}(T \otimes 1)\mathbb{W}^*$. Wir werden nicht nachweisen, dass dies ein Morphismus ist. Im Spezialfall einer diskreten Gruppe ist dies klar. Dieser Fall ist es aber, welcher uns am meisten interessiert. Dabei ist $\mathbb{W} : L^2(G \times G) \to L^2(G \times G)$ ein Operator, welcher uns später noch begegnet. Dieser ist definiert über

$$\mathbb{W} : \ f(x, y) \mapsto f\left(x, x^{-1}y\right)$$

und man rechnet nach (was wir noch tun werden), dass

$$\mathbb{W}^* : \ f(x, y) \mapsto f(x, xy)$$

gilt. Man kann nun auch sehr einfach erkennen, dass

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$$

gilt.

2.9 Kompakte Quantengruppen

Definition 50 (kompakte Quantengruppe)**.** Eine **kompakte Quantengruppe** $\mathbb{G}$ ist eine bivereinfachbare unitäre C*-Bialgebra $\mathbb{G} = (A, \Delta)$. Die kompakte Quantengruppe heißt **kokommutativ** bzw. **kommutativ**, wenn (A, Δ) kokommutativ (d.h. $\Delta = \Sigma\Delta$, wobei $\Sigma : A \otimes A \to A \otimes A$ über $\sigma : a \otimes b \mapsto b \otimes a$ definiert ist) bzw. kommutativ ist.

Als nächstes beweisen wir, dass dies ein weiterer Eintrag in unserem Wörterbuch für die kompakten Gruppen ist.

Satz 51 (kommutative kompakte Quantengruppen)**.** *Jede kommutative kompakte Quantengruppe ist isomorph zu* $C(G)$ *für eine kompakte Gruppe* G .

Beweis. Wir wissen bereits, dass eine kompakte Quantengruppe $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ zu zu einer kompakten Halbgruppe H korrespondiert.

Wenn H eine Gruppe ist, dann folgt aus

$$(\Delta(f)(1 \otimes g))(x, y) = f(xy)g(y),$$

und der Tatsache, dass die lineare Hülle eine Punkte trennende $*$-Unteralgebra von $C(H \times H) = A \otimes A$ ist, dass $\Delta(A)(1 \otimes A)$ linear dicht in $A \otimes A$ ist. Entsprechend verfährt man mit $\Delta(A)(A \otimes 1)$. Das zeigt, dass $\mathbb{G}$ bivereinfachbar ist.

Wir haben noch zu zeigen (siehe das Lemma unten), dass das Kürzungsgesetz

$$xy = xz \Rightarrow y = z \quad \text{und} \quad yx = zx \Rightarrow y = z$$

für alle $x, y, z \in H$ aus der Bivereinfachbarkeit von $\mathbb{G}$ folgt. Wir betrachten nur eines der Kürzungsgesetze. Das andere erhält man genauso. Das Kürzungsgesetz ist äquivalent dazu, dass

$$f(xy) = f(xz) \ \forall f \in C(H) \Rightarrow y = z$$

für alle $x, y, z \in H$ gilt. Die Punkte $x, y, z \in H$ korrespondieren zu Charakteren χ_x, χ_y, χ_z . Es berechnet sich beispielsweise der Charakter χ_{xy} zu $(\chi_x \otimes \chi_y)\Delta$. Die Gleichung $f(xy) = f(xz) \ \forall f \in C(H)$ übersetzt sich entsprechend in

$$(\chi_x \otimes \chi_y)\Delta(f) = (\chi_x \otimes \chi_z)\Delta(f) \ \forall f \in A \Rightarrow (\chi_x \otimes \chi_y)\left(\Delta(A)(A \otimes 1)\right) = (\chi_x \otimes \chi_z)\left(\Delta(A)(A \otimes 1)\right).$$

Ist nun $\Delta(A)(A\otimes 1)$ linear dicht in $A\otimes A$, dann folgt also $\chi_x\otimes\chi_y = \chi_x\otimes\chi_z$ und damit $(x,y)=(x,z)$.

Es stellt sich noch die Frage, ob das Kürzungsgesetz reicht, um aus einer kompakten Halbgruppe eine Gruppe zu machen. Dies ist die Aussage des folgenden Lemmas. □

Lemma 52 (kompakte Halbgruppen mit Kürzungsregel)**.** *Es sei $(H,\cdot)$ eine kompakte Halbgruppe, welche die Kürzungsregel $xy = xz \Rightarrow y = z$ und $yx = zx \Rightarrow y = z$ für alle $x,y,z\in H$ erfüllt. Dann ist H bereits eine kompakte Gruppe.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen (wegen der Kompaktheit), dass H eine Gruppe ist. Nehmen wir an, dass $hH = Hh = H$ für alle $h\in H$ gilt. Dann findet man genau ein $e\in H$ mit $eh = h$. Sei nun $x\in H$, dann gibt es ein $y\in H$ mit $x = hy$. Damit ist aber $ex = ehy = hy = x$. Also ist e ein linksneutrales Element. Genauso gibt es ein rechtsneutrales Element e'. Es ist dann aber $e = ee' = e'$ ein neutrales Element. Dieses hängt damit nicht von h ab. Wir haben nun nur noch zu zu zeigen, dass es für $h\in H$ ein Rechtsinverses gibt. Wegen $hH = H$ gibt es ein $g\in H$ mit $hg = e$. Damit ist H tatsächlich eine Gruppe.

Wir haben also $hH = H$ für alle $h\in H$ zu zeigen ($Hh = H$ geht entsprechend). Es sei $x\in H$ ein Häufungspunkt der Folge $(h^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gegeben sei ein $g\in H$. Wir haben $g\in hH$ zu zeigen. Es ist aber xg ein Häufungspunkt von $(h^n g)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass $xg\in xhH$ ist, was die Behauptung wegen dem Kürzungsgesetz gibt.

Um dies zu zeigen, reicht es zu beweisen, dass xg im Abschluss von xhH liegt (denn xhH ist kompakt und damit eine abgeschlossene Menge). Es sei nun $xhH\subset U$ eine Umgebung von xhH. Weiter gibt es wegen der Kompaktheit von hH eine offene Umgebung V von x mit $VhH\subset U$. Es ist aber $h^n\in V$ für ein großes $n\in\mathbb{N}$. Damit ist aber $h^{n+1}H\subset U$. Damit ist aber $h^m H\subset U$ für $m>n$. Weil nun aber auch $xg\in h^m H$ ist, folgt $xg\in U$. Damit ist aber xg in jeder Umgebung von xhH. Also ist wegen der Abgeschlossenheit dieser Menge $xg\in xhH$. □

Beispiel (reduziertes Dual zu einer diskreten Gruppe ist eine kompakte Quantengruppe)**.** Es sei G eine diskrete Gruppe. Wir haben bereits $C_r^*(G)$ zu einer C*-Bialgebra gemacht. Wir können uns schnell klarmachen, dass $L_x\in C_r^*(G)$ sind und diese natürlich linear dicht liegen (wenn $x\in G$ variiert). Weiter sieht man nun auch, dass diese bivereinfachbar ist. Mit etwas Rechnung bekommt man tatsächlich, dass $\Delta(L_x) = L_x\otimes L_x$ gilt. Dies bedeutet für $L_e = 1$ aber, dass Δ ein unitärer Homomorphismus ist. Es ist also $(C_r^*(G),\Delta)$ eine kompakte Quantengruppe.

Beispiel (nicht-triviale kompakte Quantengruppe)**.** Wir wollen nun ein etwas schöneres Beispiel betrachten. Man erinnere sich an $\mathrm{SU}(2)$. Dies ist eine kompakte Gruppe. Eine explizite Beschreibung ist etwa gegeben durch

$$\mathrm{SU}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : \ a,b\in\mathbb{C} \quad |a|^2+|b|^2 = 1 \right\}.$$

Die zugehörige C*-Bialgebra wird erzeugt von den zu a und b gehörenden stetigen Abbildungen α und β (Koordinatenabbildungen!). Die einzige Relationen (abgesehen von der Kommutativität) ist

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1.$$

Die Komultiplikation Δ wird durch

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) &= \alpha\otimes\alpha - \beta^*\otimes\beta\\ \Delta(\beta) &= \beta\otimes\alpha + \alpha^*\otimes\beta\end{aligned}$$

eindeutig bestimmt. Wir wollen nun eine ganz ähnliche C*-Bialgebra definieren. Es sei H ein Hilbertraum mit einer ONB $e_{i,j}$ ($i\in\mathbb{N}_0$ und $j\in\mathbb{Z}$) und $\mu\in]0,1[$. Wir definieren Operatoren $\alpha,\beta\in B(H)$ über

$$\begin{aligned}\alpha e_{i,j} &= \sqrt{1-\mu^{2i}}e_{i-1,j} \text{ (für } i=0 \text{ ist die rechte Seite } = 0)\\ \beta e_{i,j} &= \mu^i e_{i,j-1}.\end{aligned}$$

Es sei $\mathrm{SU}_\mu(2)$ die C*-Unteralgebra von $B(H)$, welche durch α und β erzeugt wird. Man kann nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}\alpha\beta = \mu\beta\alpha, &\qquad \alpha\beta^* = \mu\beta^*\alpha,\\ \beta\beta^* = \beta^*\beta, &\\ \alpha^*\alpha+\beta^*\beta = 1, &\quad \alpha\alpha^* + \mu^2\beta\beta^* = 1\end{aligned}$$

gilt. Dies ist also eine Deformation (ohne auf die Theorie der C*-Algebra-Deformationen einzugehen) der zu $\mathrm{SU}(2)$ gehörenden C*-Bialgebra mit Übergang $\mu \to 1$.

Wir müssen aber noch die Komultiplikation festlegen. Diese wird definiert über

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - \mu\beta^* \otimes \beta$$

$$\Delta(\beta) = \beta \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \beta.$$

Man kann nachrechnen, dass Δ einen $*$-Homomorphismus bildet. Dies wollen wir nicht tun. Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass dies viel eleganter durch Nutzung von universellen C*-Algebren geht. Weiter sieht man, dass $\mathrm{SU}_\mu(2)$ eine kompakte Quantengruppe ist.

Wir wollen uns nun darum kümmern, Haarmaße in nicht-kommutativen kompakten Hausdorff-Räumen zu verstehen. Wir sind dabei nur an normierten Maßen (also Wahrscheinlichkeitsmaßen) interessiert. Die richtige Art und Weise die Maße auf solche Räume zu verallgemeinern ist es die Integrale zu verallgemeinern. Wir erinnern an der Satz von Riesz-Markov.

Satz 53 (Riesz-Markov)**.** *Der Banachraum der komplexen regulären Borelmaße auf einem kompakten Raum K ist isomorph zum Dualraum von $C(K)$. Die Isomorphie wird vermittelt über*

$$\mu \mapsto \left(f \mapsto \int f \ d\mu \right) \in C(K)'.$$

Unter der Isomorphie entsprechen den positiven Funktionalen genau die positiven reguläre Maße. Es sind also Zustände das nicht-kommutative Analogon von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem kompakten Raum. Wir müssen nun auch die Links- und Rechtsinvarianz des Haarmaßes darüber charakterisieren, was uns im nicht-kommutativen Rahmen zur Verfügung steht.

Definition 54 (Haarzustand)**.** Ein **Haarzustand** einer kompakten Quantengruppe (A, Δ) ist ein links- und rechtsinvarianter Zustand h von A . Ein Zustand heißt **linksinvariant**, wenn $(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a) = 1_A h(a)$ und **rechtsinvariant**, wenn $(h \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = 1_A h(a)$ gilt.

Mit der trivialen Beobachtung, dass

$$h \otimes \mathrm{id}_{C(X)} : C(X \times X) \ni f \mapsto \left(y \mapsto \int f(x,y) \ d\mu \right) \in C(X)$$

gilt, falls h der Zustand ist, der zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ assoziiert wurde, erhält man das folgende Resultat.

Satz 55 (Haarzustände und Haarmaße)**.** *Wir betrachten die Quantengruppe $\mathbb{G} = (C(G), \Delta)$ zu einer kompakten Gruppe G . Dann entsprechen sich normierte Haarmaße und Haarzustände bijektiv unter der Abbildung*

$$\mu \mapsto \left(f \mapsto \int f \ d\mu \right).$$

Für das weitere Vorgehen wollen wir noch eine Umformulierung des Haarzustandes in einen leichter zu manipulierenden Begriff. Dazu müssen wir in der Lage sein Funktionale zu falten.

Definition 56 (Faltung von Funktionalen)**.** Es sei (A, Δ) eine C*-Bialgebra und $f, g \in A'$. Dann definiert man

$$f * g = (f \otimes g)\Delta$$

und bezeichnet dies als die Faltung von f und g .

Wir beweisen noch ein kleines Lemma, damit der Leser sich an die neuen Begriffe gewöhnen kann.

Lemma 57 (Assoziativität der Faltung)**.** *Es sei (A, Δ) eine C*-Bialgebra. Dann ist die Faltung $*$ von Zuständen assoziativ.*

Beweis. Es seien f, g, h Zustände. Dann gilt

$$\begin{aligned} f*(g*h) &= f*((g\otimes h)\Delta) = (f\otimes(g\otimes h))\,(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta \\ &= (f\otimes g\otimes h)\,(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta = (f\otimes g\otimes h)\,(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta \\ &= ((f\otimes g)\otimes h)\,(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta = ((f\otimes g)\Delta)*h \\ &= (f*g)*h. \end{aligned}$$

□

Beispiel (Haarzustand für das Dual zu einer diskreten Gruppe)**.** Wir haben bereits implizit das Beispiel $C(G)$ für eine kompakte Gruppe G gesehen. Sei nun G eine diskrete Gruppe. Wir betrachten wieder die Quantengruppe $(C_r^*(G), \Delta)$. Von der Abbildung $h : C_r^*(G) \to \mathbb{C}$, welche durch

$$h(L_x) = \delta_{x,e}$$

festgelegt wird, wollen wir zeigen, dass diese ein Haarzustand ist. Wenn man beachtet, dass man eine kanonische lineare Einbettung $\iota : C_r^*(G) \hookrightarrow \ell^2(G)$ hat, kann man erkennen, dass

$$h(T) = \langle \delta_e, T(\delta_e)\rangle$$

gilt. Dabei bezeichnen wir mit δ_x (für $x \in G$) das Element $(\delta_{x,y})_{y\in G}$. Damit ist aber h natürlich ein Zustand. Wir wollen die Einbettung noch genauer beschreiben. Dazu beachte man, dass R_y mit allen L_x kommutiert und damit mit allen Elementen aus $C_r^*(G)$. Wenn wir nun die stetige lineare Abbildung

$$\iota : T \mapsto T(\delta_e)$$

definieren, dann ist diese injektiv. Man beachte dazu, dass aus

$$R_y\,(T(\delta_e)) = (TR_y)(\delta_e) = T(\delta_{y^{-1}}),$$

sofort die Injektivität der Abbildung folgt. Die Einbettung hätten wir somit konstruiert. Weiter sei T positiv mit $h(T) = 0$, dann gilt

$$0 = h(T) = h(S^*S) = \langle \delta_e, (S^*S)(\delta_e)\rangle = \langle S(\delta_e), S(\delta_e)\rangle$$

für ein $S \in C_r^*(G)$. Damit ist aber $S = 0 \Rightarrow T = 0$, denn es ist die Abbildung $S \mapsto S(\delta_e)$ gerade die obige Einbettung. Wenn eine kompakte Quantengruppe einen derartigen Haarzustand hat, dann werden wir diese reduziert nennen.

Es ist noch unklar, ob h invariant ist. Dies rechnen wie einfach nach. Es gilt

$$(h\otimes\mathrm{id})\Delta(L_x) = (\mathrm{id}\otimes h)\Delta(L_x) = h(L_x)L_x = \delta_{x,e}L_x = \delta_{x,e}L_e = h(L_x)1.$$

Und damit ist aber h tatsächlich ein Haarzustand.

Mit diesem Begriff zur Hand können wir nun formulieren:

Lemma 58 (Charakterisierung von Haarzuständen)**.** *Ein Zustand h ist genau dann ein Haarzustand, wenn $h*g = g*h = h$ für alle Zustände g gilt.*

Beweis. Man kann schnell nachrechnen, dass $g\circ(h\otimes\mathrm{id}) = h\otimes g$ und $g\circ(\mathrm{id}\otimes h) = g\otimes h$ gilt. Damit ist

$$h*g = g*h = h$$

äquivalent zu

$$g\circ(h\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = g\circ(\mathrm{id}\otimes h)\circ\Delta = g(1)\cdot h.$$

Weil die Zustände aber trennend (zumindest auf selbstadjungierten Elementen - was aber reicht) sind, ist dies äquivalent zu

$$(h\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = (\mathrm{id}\otimes h)\circ\Delta = 1_A\cdot h.$$

Dies ist aber die Definition von Haarzuständen und wir sind fertig. □

Theorem 59 (Existenz und Eindeutigkeit eines Haarzustandes)**.** *Für eine kompakte Quantengruppe $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ gibt es genau einen Haarzustand h .*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar. Sei dazu h' ein weiterer Haarzustand, dann gilt

$$h' = h' * h = h.$$

Nun wollen wir einen Haarzustand konstruieren. Dazu schauen wir uns für Zustände g die Mengen

$$M_g := \{h \in A' : h \text{ ist ein Zustand mit } h * g = g * h = h\}$$

an. Was wir nur tun müssen, ist zu zeigen, dass

$$\bigcap_{g \in S(A)} M_g \neq \emptyset$$

ist. Dazu beachten wir, dass die Mengen M_g schwach*-abgeschlossen sind und erinnern uns (das ist der Satz von Banach-Alaoglu), dass die Einheitskugel in A' schwach*-kompakt ist. Wir haben also nur zu zeigen, dass der endliche Durchschnitt von Mengen der Gestalt M_g (wobei g ein Zustand ist) nicht leer ist. Dies beweisen wir in zwei Schritten.

Lemma 60. *Es sei g ein Zustand. Dann ist die Menge M_g nicht leer.*

Wenn wir zeigen, dass

$$M_{g_1} \cap M_{g_2} \supset M_{(g_1+g_2)/2}$$

gilt, dann sind wir fertig. Dies impliziert aber das folgende Lemma.

Lemma 61. *Es gilt $M_g \subset M_f$ für alle Zustände f, g für die es ein $\alpha > 0$ gibt mit $\alpha f \leq g$.*

Damit haben wir nun auch das Theorem bewiesen. □

Beweis zu Lemma 60. Wir betrachten die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$h_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g^{*k}.$$

Dann gilt

$$h_n * g = g * h_n = h_n + \frac{1}{n}(g^{*(n+1)} - g).$$

Nun ist aber h_n ein Zustand. Dies ist richtig, weil Δ als C*-Homomorphismus positiv ist und $g^{*k}(1) = 1$ gilt (für $k = 1, ..., n$), weil Δ unitär ist.

Nun hat aber die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt h, welcher ein Zustand ist. Dies ist richtig, weil die Menge der Zustände eine schwach*-abgeschlossene Teilmenge von der (schwach*-kompakten) Einheitskugel in A' ist. Damit gilt $h \in M_g$. □

Beweis zu Lemma 61. Es sei h ein Zustand. Das ganze besteht aus elender Rechnerei (der Leser mache sich klar, was Multiplikation und was Operatoranwendung ist - noch mehr Klammern erschweren hier die Lesbarkeit!)

$$\begin{aligned}
f * h = h &\Leftrightarrow (h \otimes f \otimes h)(\mathrm{id} \otimes \Delta) = h \otimes h \\
&\Leftrightarrow (h \otimes f \otimes h)(\mathrm{id} \otimes \Delta)\,[(b \otimes 1)\Delta(a)] = (h \otimes h)\,[(b \otimes 1)\Delta(a)] \;\; \forall a, b \in A \\
&\Leftrightarrow (h \otimes f \otimes h)\,[(b \otimes 1 \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(a)] = (h \otimes h)\,[(b \otimes 1)\Delta(a)] \;\; \forall a, b \in A \\
&\Leftrightarrow (h \otimes f \otimes h)\,[(b \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)] = (h \otimes h)\,[(b \otimes 1)\Delta(a)] \;\; \forall a, b \in A \\
&\Leftrightarrow (h \otimes f)\,[(b \otimes 1)\Delta(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a)] = h\,[b(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a)] \;\; \forall a, b \in A \\
&\Leftrightarrow (h \otimes f)\,[(b \otimes 1)\Delta(x)] = (h \otimes f)\,[(b \otimes 1)(x \otimes 1)] \;\; \forall a, b \in A \quad \text{mit} \quad x = (\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a) \\
&\Leftrightarrow (h \otimes f)\,[(b \otimes 1)\,(\Delta(x) - (x \otimes 1))] = 0 \;\forall a, b \in A \quad \text{mit} \quad x = (\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a) \\
&\Leftarrow (h \otimes f)\,\left[(\Delta(x) - (x \otimes 1))^*\,(\Delta(x) - (x \otimes 1))\right] = 0 \quad \forall a \in A \quad \text{mit} \quad x = (\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a)
\end{aligned}$$

Entsprechend auch mit $h * f = h$. Die Implikation $\Leftarrow$ ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Sei nun h ein Zustand mit $h * g = g * h = h$. Dann gilt mit $x = (\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a)$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes g)\Delta(x) &= (\mathrm{id} \otimes g)\Delta(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a) = (\mathrm{id} \otimes g)(\mathrm{id} \otimes h)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a) \\
&= (\mathrm{id} \otimes h \otimes g)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = (\mathrm{id} \otimes h \otimes g)(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(a) = (\mathrm{id} \otimes (h * g))\Delta(a) = x.
\end{aligned}$$

Damit folgt aber mit $y = \Delta(x) - x \otimes 1$

$$\begin{aligned}(h \otimes g)(y^* y) &= h(\mathrm{id} \otimes g)\left(\Delta(x^* x) + x^* x \otimes 1 - \Delta(x^*)(x \otimes 1) - (x^* \otimes 1)\Delta(x)\right) \\ &= h\left[(\mathrm{id} \otimes g)\Delta(x^* x) + x^* x - ((\mathrm{id} \otimes g)\Delta(x^*))\, x - x^*\left((\mathrm{id} \otimes g)\Delta(x)\right)\right] \\ &= (h \otimes g)\Delta(x^* x) - h(x^* x) = (h * g)\Delta(x^* x) - h(x^* x) = 0.\end{aligned}$$

Wegen $\alpha(h \otimes f) \leq (h \otimes g)$ folgt die Behauptung aus der oben bewiesenen Implikation. □

Definition 62 (Raum der quadratintegrierbaren Funktionen)**.** Es sei $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ eine kompakte Quantengruppe. Weiter sei h der Haarzustand und

$$N_h := \{a \in A : \ h(a^* a) = 0\}.$$

Dann definiert man

$$L^2(\mathbb{G}) := \overline{A/N_h}^{\|\cdot\|_2},$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die zum Skalarprodukt

$$\langle a + N_h, b + N_h \rangle := h(a^* b)$$

assoziierte Norm ist. Man nennt $L^2(\mathbb{G})$ auch den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen in der kompakten Quantengruppe $\mathbb{G}$.

Definition 63 (reduzierte Quantengruppen)**.** Eine kompakte Quantengruppe nennt man **reduziert**, wenn

$$N_h = 0$$

für den Haarzustand h gilt.

Beispiel. Wir betrachten wieder eine diskrete Gruppe. Wir haben bereits bewiesen, dass die Abbildung

$$h : C_r^*(G) \to \mathbb{C} \quad L_x \mapsto \delta_{e,x}$$

ein reduzierter Haarzustand ist. Wenn wir nun die Vervollständigung von $C_r^*(G)$ unter dem von h induzierten Skalarprodukt

$$C_r^*(G) \times C_r^*(G) \to \mathbb{C} \quad (L_x, L_y) \mapsto \delta_{x,y}$$

bilden, erhalten wir

$$L^2(\mathbb{G}) \simeq \ell^2(G) = L^2(G)$$

für die kompakte Quantengruppe $\mathbb{G} = (C_r^*(G), \Delta)$.

Das folgende Resultat haben wir vollständig bewiesen.

Satz 64. *Kommt* $\mathbb{G} = (C_r^*(G), \Delta)$ *bereits von einer diskreten Gruppe* G *, so gilt* $L^2(G) \simeq L^2(\mathbb{G})$ *und* $\mathbb{G}$ *ist reduziert.*

Wir können auch noch entsprechendes für kompakte Gruppen formulieren.

Lemma 65. *Kommt* $\mathbb{G} = (C(G), \Delta)$ *bereits von einer kompakten Gruppe* G *, so gilt* $L^2(G) \simeq L^2(\mathbb{G})$ *und* $\mathbb{G}$ *ist reduziert.*

Beweis. Es ist nur $L^2(G) \simeq L^2(\mathbb{G})$ zu zeigen. Dies ist aber klar, weil $C(G)$ dicht in $L^2(G)$ ist. □

Was man nun machen könnte ist das Theorem von Peter-Weyl zu verallgemeinern. Dies ist aber, weil ich so viele Grundlagen machen musste nicht in der Zeit möglich gewesen. Dazu hätte man noch Kodarstellungen machen müssen.

Im Folgenden, weil es nicht mehr zum Vortrag gehört, werden wir keine Beweise geben und keine Zwischenresultate darlegen. Der interessierte Leser sei auf die Veröffentlichungen der Entwickler der Theorie verwiesen.

3 Ausblick

Wir führen nun die Quantengruppen nach Woronowicz ein. Diese verallgemeinern die Pontryagin-Dualität im Sinne der Topologie und der Gruppen. Was ist aber mit der Maßtheorie? Das Verhältnis zur Maßtheorie von Quantengruppen nach Woronowicz ist bis heute ungeklärt. Eine Variante von Quantengruppen erwähnen wir auch noch. Diese verallgemeinern die Dualität auch auf maßtheoretische Weise und bettet sich gut in die Dualität von Woronowicz ein.

Dieser Teil ist ein reiner Ausblick. Ursprünglich war die Idee des Vortrages aber diesen Abschnitt zu erklären. Hier finden sich aber keine Beweise oder weiterführende Erklärungen. Dafür sei wieder auf Veröffentlichungen und das Buch von Timmermann verwiesen.

3.1 Definition multiplikativ unitärer Elemente

Wir betrachten nun vorerst eine lokal kompakte Gruppe G . Dann gibt es bekanntlich ein linksinvariantes Haarmaß μ . Über dies lässt sich definieren

$$\mathbb{W}_G : L^2(G,\mu)\otimes L^2(G,\mu) \to L^2(G,\mu)\otimes L^2(G,\mu) \qquad f(x,y)\mapsto f(x,x^{-1}y).$$

Wegen

$$\langle \mathbb{W}_G f, g\rangle = \iint \overline{f(x,x^{-1}y)}g(x,y)\,dydx = \iint \overline{f(x,y)}g(x,xy)\,dydx = \langle f, \mathbb{W}_G^* g\rangle$$

ist $\mathbb{W}_G$ ein unitärer Operator auf $L^2(G,\mu)\otimes L^2(G,\mu)\simeq L^2(G\times G,\mu\times\mu)$, welcher als **Kac-Takesaki-Operator** bezeichnet wird.

Definition 66. Im folgenden bezeichnen wir mit $\Sigma : H\otimes H\to H\otimes H$ den **Flipoperator**, welcher die Elementartensoren $h_1\otimes h_2$ auf $h_2\otimes h_1 = \Sigma\,(h_1\otimes h_2)$ abbildet. Sei nun $T : H\otimes H\to H\otimes H$ ein beliebiger Operator. So definiert man

$$\begin{aligned} T_{[1,2]} &= T\otimes \mathrm{id}_H : H\otimes H\otimes H \to H\otimes H\otimes H\\ T_{[2,3]} &= \mathrm{id}_H \otimes T : H\otimes H\otimes H \to H\otimes H\otimes H\\ T_{[1,3]} &= (\Sigma\otimes\mathrm{id}_H)\,(\mathrm{id}_H\otimes T)\,(\Sigma\otimes\mathrm{id}_H) : H\otimes H\otimes H \to H\otimes H\otimes H. \end{aligned}$$

Mit dieser Notation an der Hand kann man nun die Assoziativität in $\mathbb{W}=\mathbb{W}_G$ kodieren. Anschaulich kann man sich das so vorstellen, dass die Existenz der Inversen bereits für den Nachweis gebraucht hat, dass $\mathbb{W}$ unitär und wohldefiniert ist. Darin ist also die Existenz der Inversen bereits in gewissem Sinn kodiert. Nun wieder zur Assoziativität. Diese liefert für den Kac-Takesaki-Operator $\mathbb{W}$ die sogenannte **Pentagon-Gleichung**

$$\mathbb{W}_{[1,2]}\mathbb{W}_{[1,3]}\mathbb{W}_{[2,3]} = \mathbb{W}_{[2,3]}\mathbb{W}_{[1,2]}.$$

Wir sollten also solche Abbildungen untersuchen.

Definition 67 (multiplikative unitäre Elemente)**.** Ein stetiger unitärer Operator $\mathbb{W}\in B(H\otimes H)$, welcher die Pentagongleichung

$$\mathbb{W}_{[1,2]}\mathbb{W}_{[1,3]}\mathbb{W}_{[2,3]} = \mathbb{W}_{[2,3]}\mathbb{W}_{[1,2]}$$

erfüllt, nennt man ein **multiplikatives unitäres Element**. Man nennt die multiplikativen unitären Elemente **kokommutativ**, falls $\mathbb{W}_{[1,3]}$ mit $\mathbb{W}_{[1,2]}$ kommutiert und **kommutativ**, falls $\mathbb{W}_{[1,3]}$ mit $\mathbb{W}_{[2,3]}$ kommutiert.

Wie man sofort sieht ist $\mathbb{W}_G$ ein kokommutatives multiplikatives unitäres Element. Dies hat anschaulich damit zu tun, dass es sich um einen kommutativen Raum handelt. Es ist weiter $\mathbb{W}_G$ genau dann kommutativ, wenn die lokal kompakte Gruppe G kommutativ ist.

Wir werden sehen, dass wir aus $\mathbb{W}_G$ die Gruppe G rekonstruieren können. Wir können mehr noch beweisen, dass im Wesentlichen jedes kokommutative multiplikative unitäre Element von einer lokal kompakten Gruppe kommt.

Dazu kommen wir auf einen neuen Begriff. Um heuristisch zu erklären, warum dies nun der richtige Begriff ist, würde ich viel zu lange ausholen müssen. Der Leser sei also dazu aufgefordert dies als ein nötiges Übel und technische Voraussetzung wahrzunehmen.

Definition 68 (modulare multiplikative unitäre Elemente). Ein multiplikatives unitäres Element $\mathbb{W} \in B(H \otimes H)$ heißt **modular**, falls es zwei positive, injektive und selbstadjungierte Operatoren $Q : D(Q) \to H$, $\hat{Q} : D\left(\hat{Q}\right) \to H$ und einen unitären Operator V auf $\overline{H} \otimes H$ gibt, so dass

1. $\mathbb{W}^* \left(\hat{Q} \otimes Q\right) \mathbb{W} = \hat{Q} \otimes Q$ und
2. für jedes $h_1, h_2 \in H$, jedes $d_1 \in D(Q)$ und jedes $d_2 \in D\left(Q^{-1}\right)$

$$\langle h_1 \otimes d_1, \mathbb{W}(h_2 \otimes d_2)\rangle = \left\langle \overline{h_1} \otimes Qd_1, V\left(\overline{h_2} \otimes Q^{-1} d_2\right)\right\rangle$$

gilt. Weiter nennt man $\mathbb{W}$ **beherrschbar**, wenn man $Q = \hat{Q}$ wählen kann.

Satz 69 (Beherrschbarkeit kommutativer und kokommutativer multiplikativer unitärer Elemente). *Es sei $\mathbb{W}$ ein kommutatives oder kokommutatives multiplikatives unitäres Element. Dann ist $\mathbb{W}$ beherrschbar.*

3.2 Quantengruppen nach Woronowicz

Definition 70 (normale Funktionale). Ein **normales Funktional** auf $B(H)$ ist eine lineare Abbildung $\lambda : B(H) \to \mathbb{C}$ für welche es Elemente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, H)$ mit

$$\lambda(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, Ty_n\rangle$$

für alle $T \in B(H)$ gibt. Die Menge der normalen Funktionale von $B(H)$ bezeichnen wir mit $B(H)_*$.

Satz 71 (C*-Bialgebren assoziiert zu modularen multiplikativen unitären Elementen). *Es sei $\mathbb{W}$ ein modulares multiplikatives unitäres Element auf H . Dann ist*

$$\hat{A}(\mathbb{W}) := \overline{\{(\mathrm{id} \otimes \phi)(\mathbb{W}) \mid \phi \in B(H)_*\}}^{\|\cdot\|} \text{ bzw. } A(\mathbb{W}) := \overline{\{(\phi \otimes \mathrm{id})(\mathbb{W}) \mid \phi \in B(H)_*\}}^{\|\cdot\|}$$

zusammen mit

$$\hat{\Delta}_{\mathbb{W}} : \hat{A}(\mathbb{W}) \to \mathcal{M}\left(\hat{A}(\mathbb{W}) \otimes \hat{A}(\mathbb{W})\right), \quad T \mapsto \mathbb{W}^*(1 \otimes T)\mathbb{W}$$

bzw. mit

$$\Delta_{\mathbb{W}} : A(\mathbb{W}) \to \mathcal{M}\left(A(\mathbb{W}) \otimes A(\mathbb{W})\right), \quad T \mapsto \mathbb{W}(T \otimes 1)\mathbb{W}^*$$

eine bivereinfachbare C-Bialgebra. Weiter ist*

$$\mathbb{W} \in \mathcal{M}\left(\hat{A}(\mathbb{W}) \otimes A(\mathbb{W})\right).$$

Man nennt die C-Bialgebra $\hat{A}(\mathbb{W})$ das **linke Bein** von $\mathbb{W}$ und $A(\mathbb{W})$ das **rechte Bein** von $\mathbb{W}$.*

Definition 72 (Quantengruppen von Woronowicz). Eine C*-Bialgebra (A, Δ) nennt man eine **Quantengruppe nach Woronowicz**, falls es eine modulare multiplikative Einheit $\mathbb{W}$ gibt, so dass (A, Δ) als C*-Bialgebra isomorph zum linken Bein

$$\left(\hat{A}(\mathbb{W}), \hat{\Delta}_{\mathbb{W}}\right)$$

von $\mathbb{W}$ ist.

Es gibt aber verschiedene „Realisierungen" des linken Beins. So gibt es von Neumann-algebraische Versionen, sowie universelle Versionen von Quantengruppen. Wir haben hier die reduzierte C*-algebraische Version gesehen. All diese sind ein und dieselbe Seite einer Medaille, der zugrunde liegenden abstrakten Quantengruppe.

3.3 Dualitätstheorem

Definition 73 (duale Quantengruppe). Es sei $\mathbb{W}$ ein multiplikatives modulares unitäres Element. Dann ist das **duale multiplikative unitäre Element** $\mathbb{W}^{op} := \Sigma\mathbb{W}^*\Sigma$.

Satz 74 (Modulare multiplikative unitäre Elemente unter Dualität)**.** *Es sei* $\mathbb{W}$ *ein modulares bzw. beherrschbares multiplikatives unitäres Element. Dann ist auch* $\mathbb{W}^{op}$ *auch ein modulares bzw. beherrschbares multiplikatives unitäres Element. Weiter sind das linke (bzw. rechte) Bein von* $\mathbb{W}$ *und das rechte (bzw. linke) Bein von* $\mathbb{W}^{op}$ *identisch.*

Theorem 75 (Existenz der dualen Quantengruppe)**.** *Es sei* $\mathbb{W}$ *ein modulares multiplikatives Element. Und* $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ *die assoziierte C*-Bialgebra (das linke Bein von* $\mathbb{W}$ *). Dann hängt (bis auf Isomorphie)* $\hat{\mathbb{G}}$ *(das rechte Bein von* $\mathbb{W}$ *) nur von* $\mathbb{G}$ *und nicht von* $\mathbb{W}$ *ab.*

Theorem 76 (verallgemeinerte Pontryagin-Dualität)**.** *Es ist* $\mathbb{G}$ *kanonisch isomorph zu* $\hat{\hat{\mathbb{G}}}$ *. Für Quantengruppen, welche kommutativ und kokommutativ sind, entspricht dies der gewöhnlichen Pontryagin-Dualität.*

3.4 Nicht-kommutative Maßtheorie

Wir haben, so kann man annehmen, bereits die Maßtheorie auf nicht-kommutative Räume übertragen. Dies ist aber nicht ganz richtig. Wir haben nur die endlichen Maße übertragen. Bei nicht-kompakten Gruppen sind diese aber nicht endlich. Der richtige Begriff, welchen wir suchen sind die Gewichte.

Definition 77 (Gewichte)**.** Es sei A eine C*-Algebra, dann nennt man eine Abbildung $\omega : A^+ \to [0, \infty]$ ein **Gewicht**, wenn

$$\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b)$$

$$\omega(\lambda a) = \lambda\omega(a)$$

für $a, b \in A^+$ und $\lambda > 0$ gilt. Wir bezeichnen mit

$$M_\omega^+ := \left\{a \in A^+ : \omega(a) < \infty\right\}$$

die Menge der positiven integrierbaren Funktionen und mit M_ω (die Menge der integrierbaren Funktionen) die lineare Hülle von M_ω^+ . Das Gewicht heißt **treu**, falls

$$N_\omega := \{a \in A : \ \omega(a^* a) = 0\}$$

nur aus der Null besteht. Wir sagen ω ist **dicht definiert**, wenn M_ω dicht in A ist und sagen ω ist unterhalb halbstetig, falls

$$\liminf_{\substack{b \to a \\ b \in A^+}} \omega(b) \geq \omega(a)$$

für alle $a \in A^+$ gilt.

Dies wäre nun schon ein adäquater Begriff eines Maßes (genauer des zugehörigen Integrals). Aber die Nicht-Kommutativität innerhalb des Maßes ist zu gewaltig. Diese muss einer gewissen Kontrolle unterliegen. Diese Kontrolle liefert eine einparametrige Gruppe.

Definition 78 (Norm-stetige einparametrige Gruppe)**.** Ein Gruppenhomomorphismus $\sigma : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(A)$ nennt man eine **Norm-stetige einparametrige Gruppe**, falls $t \mapsto \sigma_t(a) \in A$ für alle $a \in A$ stetig bezüglich der Norm ist. Es bezeichne

$$S(z) = \{y \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Im}\, z| \geq |\mathrm{Im}\, y|\}$$

einen horizontalen Streifen. Findet man eine Norm-stetige Abbildung $\tilde{\sigma}(a) : S(z) \to A$, welche im Inneren von $S(z)$ holomorph ist und mit $\sigma(a)$ auf der reellen Achse übereinstimmt, dann schreibt man $\sigma_z(a) := \tilde{\sigma}_z(a)$ und nennt dies die **analytische Erweiterung**.

Diese Gruppen lassen wir die Nicht-Kommutativität innerhalb des Maßes kontrollieren. Dies führt zu KMS-Gewichten. Für KMS-Gewichte lässt sich nun tatsächlich eine Maßtheorie aufbauen. Es gelten Resultate wie Radon-Nikodym auch in diesem Bereich. Dies sind starke Indizien, dass dies der richtige Begriff ist.

Definition 79 (KMS-Gewicht)**.** Ein unterhalb halbstetiges treues Gewicht $\omega : A^+ \to [0, \infty]$ heißt **KMS-Gewicht** (Kubo-Martin-Schwinger-Gewicht), falls es eine einparametrige Norm-stetige Gruppe $\sigma : \mathbb{R} \to A$ gibt, sodass

- $\omega\sigma_t = \omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und
- für alle $a \in A$, für die $\sigma_{\frac{i}{2}}(a)$ definiert ist, auch $\omega(a^*a) = \omega\left(\sigma_{\frac{i}{2}}(a)\left(\sigma_{\frac{i}{2}}(a)\right)^*\right)$ gilt.

Man nennt σ eine **modulare Gruppe** von ω.

3.5 Lokal kompakte reduzierte C*-algebraische Quantengruppen

Wir wollen nun eine Art Haargewichte einführen.

Definition 80 (Haargewichte)**.** Es sei (A, Δ) eine C*-Bialgebra und ω ein KMS-Gewicht auf A. Man nennt ω **linksinvariant**, falls

$$\omega\left((\tau \otimes \mathrm{id})\Delta(x)\right) = \omega(x)$$

für alle Zustände τ und alle $x \in M_\omega^+$ gilt. Genauso nennt man ω **rechtsinvariant**, falls

$$\omega\left((\mathrm{id} \otimes \tau)\Delta(x)\right) = \omega(x)$$

für alle Zustände τ und alle $x \in M_\omega^+$ gilt.

Da man bisher nicht in der Lage war die Existenz von Haargewichten unter geeigneten Annahmen zu zeigen, werden diese axiomatisch gefordert.

Definition 81 (lokal kompakte reduzierte C*-algebraische Quantengruppe nach Kustermans und Vaes)**.** Eine bivereinfachbare C*-Bialgebra (A, Δ) nennt man eine **lokal kompakte C*-algebraische reduzierte Quantengruppe**, wenn es ein linksinvariantes unterhalb halbstetiges treues KMS-Gewicht und ein unterhalb halbstetiges treues rechtsinvariantes KMS-Gewicht gibt.

Lemma 82 (Eindeutigkeit von Haargewichten)**.** *Die KMS-Gewichte aus der Definition von lokal kompakten C*-algebraischen reduzierten Quantengruppen sind bis auf ein Vielfaches eindeutig bestimmt.*

Satz 83 (lokal kompakte Quantengruppen sind Quantengruppen nach Woronowicz)**.** *Eine lokal kompakte C*-algebraische reduzierte Quantengruppe ist eine Quantengruppe nach Woronowicz, welche von einer beherrschbaren multiplikativen unitären Einheit kommt.*

Ob auch eine Umkehrung davon (eventuell unter geeigneten Zusatzbedingungen) gilt, ist unklar. Dies wäre eine Art Existenz von Haargewichten.

Theorem 84 (Dualität und Quantengruppen)**.** *Das Woronowicz-Dual einer C*-algebraischen lokal kompakten reduzierten Quantengruppe ist eine lokal kompakte reduzierte C*-algebraische Quantengruppe.*

Insbesondere hat man nun eine Dualität für Gruppen, welche nicht nur topologisch, sondern auch maßtheoretisch ist.

3.6 Morphismen

Das erklärte Ziel der Theorie ist es die Pontryagin-Dualität zu verallgemeinern. Damit muss man aber auch geeignete Morphismen finden, welche die Dualität zu einem Funktor machen. Mit solchen Morphismen hat sich insbesondere auch Woronowicz beschäftigt. An dieser Stelle wollten wir nur zur Vollständigkeit darauf hinweisen, dass man diese auch noch zu untersuchen hat. Ein Leser sei dann wie immer auf die Literatur verwiesen.