Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 9.1.2014

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2013/14
Punktzahl: 1+2

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 9

20. *Eine Verallgemeinerung des Satzes aus der Vorlesung?* Sei $V \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Wir nehmen an, dass V in $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ein isoliertes Minimum besitzt, d.h. V besitzt in $\overline{x}$ ein lokales Minimum und es gibt eine Umgebung um $\overline{x}$, in der $\overline{x}$ das einzige lokale Minimum ist. (1)

Zeige oder widerlege: $\overline{x}$ ist ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Gradientensystems $\dot{x}(t) = -\operatorname{grad} V(x(t))$.

21. *Der Satz von Peano.* Beweise mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes den Satz von Peano: (+2)

Sei $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann besitzt für alle $(t_0, x_0) \in U$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

eine lokale Lösung.

Hinweis: Schreibe die Differenzialgleichung in ein Fixpunktproblem um. Versuche dann den Schauderschen Fixpunktsatz anzuwenden. Du kannst Dich hierbei teilweise am Beweis des EES orientieren. Hier noch die Aussage des Schauderschen Fixpunktsatzes:

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $C \subset V$ konvex. Sei $T : C \to C$ eine stetige Selbstabbildung, für die TC in einer kompakten Teilmenge von C enthalten ist. Dann gibt es ein $x \in C$ mit $Tx = x$, d.h. T besitzt einen Fixpunkt.

Für die Kompaktheitsaussage ist der Satz von Arzelà-Ascoli hilfreich:

Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum und $F \subset C(K)$ eine Teilmenge der stetigen skalarwertigen Funktionen auf K, versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist F genau dann relativ kompakt in $C(K)$ (d.h. der Abschluss von F ist kompakt), wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- F ist punktweise beschränkt, d.h. die Mengen $\{f(x) : f \in F\}$ sind für alle $x \in K$ beschränkt.
- F ist gleichgradig stetig, d.h. für alle $x \in K$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $y \in K$ mit $d(x,y) \le \delta$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \qquad \forall f \in F.$$

Wir wünschen Euch schöne Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!