Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 26.11.2014

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15

Übungen Maßtheorie: Blatt 6

15. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dann messbar? Zeige oder widerlege! (4)

16. Sei (Ω, Σ) ein Messraum und seien $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen. Setze (4)

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & \text{falls der Grenzwert existiert} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei verstehen wir den Grenzwert im eigentlichen Sinne. Zeige, dass dann $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar ist.

17. *Vergleich mit Jordan-Messbarkeit.* Aus der Analysis II kennt man folgenden Messbarkeitsbegriff auf dem $\mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller n-dimensionalen Rechtecke der Form $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ mit $a_i \le b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wir setzen

$$\mathcal{S} \coloneqq \left\{ S \subset \mathbb{R}^n : S = \bigcup_{k=1}^{m} R_k \text{ für } m \in \mathbb{N} \text{ und disjunkte } R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R} \right\}$$

und für $R = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{R}$

$$m(R) \coloneqq \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

sowie für $S = \cup_{k=1}^{m} R_k \in \mathcal{S}$

$$m(S) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} m(R_k).$$

Für eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ definiert man das *innere Jordan-Maß* durch

$$m_*(B) = \sup_{S \in \mathcal{S} : S \subset B} m(S)$$

und das *äußere Jordan-Maß* durch

$$m^*(B) = \inf_{S \in \mathcal{S} : S \supset B} m(S).$$

Wir nennen die Menge B *Jordan-messbar*, in Zeichen $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, falls $m_*(B) = m^*(B)$ gilt. Das *Jordan-Maß* $m(B)$ von B ist in diesem Fall als der gemeinsame Wert von $m_*(B)$ und $m^*(B)$ definiert.

(a) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und Jordan-messbar. Zeige, dass dann $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und dass das Jordan-Maß von B mit dem (erweiterten) Lebesgue-Maß von B übereinstimmt. (5)

(b) Gebe ein Beispiel einer beschränkten Borel-Menge B, die nicht Jordan-messbar ist. (2)