Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 17.12.2014

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15

Übungen Maßtheorie: Blatt 9

25. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass für $f \in \mathcal{M}_+(\Omega, \Sigma)$ die Abbildung $\nu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ gegeben durch (4)

$$\nu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A f \, d\mu$$

ein Maß definiert. Zeige, dass für $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \nu)$ genau dann, wenn $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und dass in diesem Fall

$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega fg \, d\mu.$$

26. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Dann heißt $f_*(\mu)$ die *Verteilung* von f.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ sei $\Omega = \{0, \ldots, n\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mu\colon \Sigma \to [0, 1]$ gegeben durch (2)

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k.$$

Ferner sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ die natürliche Inklusion. Berechne für $t \in \mathbb{R}$

$$\int_\mathbb{R} \exp(itx) \, d(f_*(\mu)).$$

(b) Wir sagen, dass die Verteilung $f_*(\mu)$ *absolut stetig* ist, falls es ein $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gibt mit (1)

$$f_*(\mu)(A) = \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_A g \, d\lambda \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Zeige, dass in diesem Fall für alle $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), f_*(\mu))$

$$\int_\Omega h \circ f \, d\mu = \int_\mathbb{R} hg \, d\lambda.$$

27. Definiere auf $[0, 1]$ die Funktion $f_0(x) = x$ und induktiv für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{für } x \in [0, 1/3) \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in [1/3, 2/3] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{für } x \in (2/3, 1] \end{cases}.$$

(a) Zeichne die Graphen von f_1, f_2 und f_3. (2)

(b) Zeige, dass $f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ existiert und eine stetige Funktion definiert. Man nennt f die *Cantor-Funktion*. (3)

(c) Zeige, dass f bis auf eine Nullmenge N differenzierbar ist. Sei $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $g = f'$ auf $[0, 1] \setminus N$. Zeige, dass $g \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{L}([0, 1]), \overline{\lambda})$, aber (3)

$$f(x) \neq \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[0,x]} g \, d\overline{\lambda}.$$