Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Wintersemester 2014/15
Punktzahl: 15

Übungen Maßtheorie: Blatt 10

28. Sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist für alle $a < c < b$. Ferner existiere

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)\,dx,$$

d.h. $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

(a) Wir nehmen zusätzlich an, dass (3)

$$c \mapsto \int_a^c |f(x)|\,dx \tag{Abs}$$

auf $[a,b)$ beschränkt ist. Zeige, dass dann f nach Abänderung auf einer Nullmenge in $\mathcal{L}^1([a,b), \mathcal{B}([a,b)), \lambda)$ liegt mit

$$\int_{[a,b)} f\,d\lambda = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) Bleibt die Aussage aus Teil (a) richtig, wenn man auf die Beschränktheit von (Abs) verzichtet? (3)

(c) Bleibt die Aussage aus Teil (a) richtig, wenn man f nicht auf einer Nullmenge abändern darf? (2)

Hinweis: Verwende die Resultate aus Aufgabe 21.

29. Bestimme den Wert des uneigentlichen Riemann-Integrals (7)

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)(2+x^2)}\,dx.$$

Hinweis: Betrachte $f(t,x) = \frac{\log(1+(tx)^2)}{(1+x^2)(2+x^2)}$.

Wir wünschen Euch fröhliche Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!